導関数の極限と微分係数の存在の関係
～生徒のやりがちな解答から～

細木（ほそき）　翔太（しょうた）

§1. はじめに

次のような問題と解答がある。

問題

関数 $f(x)$ を $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-2 & (x \geqq 1) \\ x^3+(1-a)x^2 & (x<1) \end{cases}$ と定める。

$f(x)$ が $x=1$ で微分可能となるような a，b の値を求めよ。

【模範解答】

$f(x)$ が $x=1$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は $x=1$ で連続であるから

$$\lim_{x \to 1-0} f(x)=f(1)$$

よって　$1+(1-a)=a+b-2$

ゆえに　$2a+b=4$　……①

①から

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h \to +0} \frac{a(1+h)^2+b(1+h)-2-(a+b-2)}{h}$$
$$=\lim_{h \to +0} \frac{2ah+ah^2+bh}{h}$$
$$=\lim_{h \to +0} (2a+ah+b)=2a+b=4$$

また

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h \to -0} \frac{(1+h)^3+(1-a)(1+h)^2-\{a+(4-2a)-2\}}{h}$$
$$=\lim_{h \to -0} \frac{(5-2a)h+(4-a)h^2+h^3}{h}$$
$$=\lim_{h \to -0} \{5-2a+(4-a)h+h^2\}$$
$$=5-2a$$

よって，$f'(1)$ が存在するための条件は

$$4=5-2a$$

ゆえに　$a=\dfrac{1}{2}$

このとき，①から　$b=3$

この問題の生徒がやりがちな解答に対して，「これは解答として適切なのか」という疑問を抱いた。このことについて，述べさせていただく。

§2. 生徒のやりがちな解答（？）

$f(x)$ が $x=1$ で微分可能であるとき，$f(x)$ は $x=1$ で連続であるから

$$\lim_{x \to 1-0} f(x)=f(1)$$

よって　$1+(1-a)=a+b-2$

ゆえに　$2a+b=4$　……①

また，$f(x)$ は $x \neq 1$ では微分可能であるから

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+b & (x>1) \\ 3x^2+2(1-a)x & (x<1) \end{cases}$$

逆に，①のとき $f'(x)=\begin{cases} 2ax-2a+4 & (x>1) \\ 3x^2+2(1-a)x & (x<1) \end{cases}$

であり

$$\lim_{x \to 1+0} f'(x)=4$$
$$\lim_{x \to 1-0} f'(x)=5-2a$$

より，$5-2a=4$　すなわち　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき

$\lim\limits_{x \to 1} f'(x)$ が存在するので，$f(x)$ は $x=1$ で微分可能である。　……（＊）

このとき，①から　$b=3$

§3. 疑問

（$*$）は正しいか。

すなわち

> **命題A**
>
> $f(x)$ は $x \fallingdotseq a$ で微分可能
>
> $f(x)$ は $x=a$ で連続　とするとき
>
> $\lim_{x\to a} f'(x)$ が存在
>
> $\Longrightarrow$ $f(x)$ は $x=a$ で微分可能

は真か。

筆者の最初の感想としては，この「生徒のやりがちな解答」は誤答であり，この命題も偽だろうと感じた。しかし，反例は思いつかず，図的には正しそうな命題であるため，証明を試みた。

§4. 証明

$\lim_{x\to a} f'(x)$ が存在するので，$\lim_{x\to a} f'(x)=\alpha$ とする。

このとき，任意の正の数 ε に対して，

$0<|x-a|<\delta$　　ならば　　$|f'(x)-\alpha|<\varepsilon$

を満たす正の数 δ が存在する。

$0<|h|<\delta$ を満たす h に対して，平均値の定理により

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a+\theta h)$$

となる $0<\theta<1$ が存在する。

（$f(x)$ は $x=a$ で連続で，$x \fallingdotseq a$ で微分可能であるから平均値の定理が適用できる）

$0<|\theta h|<|h|<\delta$ より　　$0<|(a+\theta h)-a|<\delta$

ゆえに　　$|f'(a+\theta h)-\alpha|<\varepsilon$

よって　　$\left|\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-\alpha\right|<\varepsilon$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するので

$f(x)$ は $x=a$ で微分可能であり，$f'(a)=\alpha$ である。

§5. 終わりに

命題A は ε-δ 論法によって厳密に証明することができた。$f(x)$ が $x=a$ で連続であることが，平均値の定理を適用するために，なくてはならない条件であることに面白さを感じた。

命題A が真であることは示されたが，「生徒のやりがちな解答」が，実際の入試でどのように採点されるのかは気になるところである。

「生徒のやりがちな解答」を書く生徒の意識としては

$\lim_{x\to a} f'(x)$ が存在する $\Longrightarrow$ $\lim_{x\to a} f'(x)=f'(a)$

という命題の意識であり，「$f(x)$ が $x=a$ で連続」という条件を抜きにして考えている可能性が高い。次に，この解答を書く生徒に出会ったときには，いろいろと聞いてみたいところである。

《参考文献》

〔1〕 数研出版　四訂版　クリアー数学演習Ⅲ　受験編

（埼玉県立蕨高等学校）