ベクトルの公式 OVF

大田　康介

§1. はじめに

ベクトルのよくある問題に次のようなものがある。

【問題 1】　$\triangle$OAB において，辺 OA を 3：1 に内分する点を C，辺 OB を 2：3 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

暗算で答えを出したいと思い，公式を導いたので，ここで紹介したい。生徒受けはそこそこ良い。授業では，**OVF＝Ota's vector formula** と言って紹介している。また，内分の公式の almost な一般化も含めて紹介する。

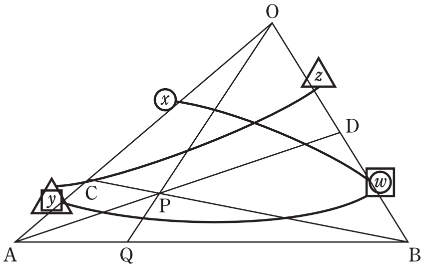
§2. 【問題 1】に対する公式 OVF

[1st OVF]

$\triangle$OAB において，辺 OA を $x：y$ に内分する点を C，辺 OB を $z：w$ に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。
また，直線 OP と 辺 AB の交点を Q とする。
このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{xw\overrightarrow{\mathrm{OA}}+yz\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{xw+wy+yz},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{xw\overrightarrow{\mathrm{OA}}+yz\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{xw+yz}$$

が成り立つ。



覚え方は，図をかいて，クロスしながら数値を掛けたり足したりすればよい。$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の分母の中間の項を取り除くだけでよい。覚えやすいところがポイントである。

証明（1st OVF）

チェバの定理により

$$\mathrm{AQ:QB=CA\times OD:OC\times BD}=yz:xw$$

よって，内分の公式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{xw\overrightarrow{\mathrm{OA}}+yz\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{yz+xw}$$

メネラウスの定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{OP:PQ}&=\mathrm{AB\times OC:QB\times CA}\\&=(yz+xw)x:xw\times y\\&=yz+xw:wy\end{aligned}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OQ}}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{xw\overrightarrow{\mathrm{OA}}+yz\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{xw+wy+yz}$$

終

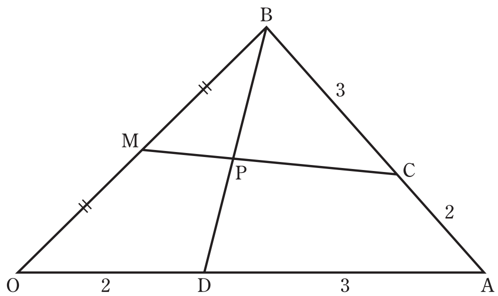
この公式を使えば，冒頭の**【問題 1】**は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3\times3\times\overrightarrow{\mathrm{OA}}+1\times2\times\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3\times3+3\times1+1\times2}=\frac{9\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{14}$$

と求められる。

§3. 内分の公式の almost な一般化

【問題 2】　$\triangle$OAB において，辺 OB の中点を M，辺 BA を 3：2 に内分する点を C，辺 OA を 2：3 に内分する点を D，線分 CM と線分 BD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。



この問題も，公式によって解決させよう。

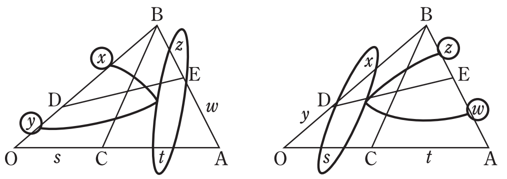
[2nd OVF]

△OAB において，辺 OA を $s:t$ に内分する点を C，辺 BO を $x:y$ に内分する点を D，辺 BA を $z:w$ に内分する点を E とし，線分 BC と線分 DE の交点を P とする。このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{xzt\overrightarrow{\mathrm{BO}}+zxs\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{xzt+yzt+zxs+wxs}$$

$$=\frac{xz(t\overrightarrow{\mathrm{BO}}+s\overrightarrow{\mathrm{BA}})}{xz(s+t)+yzt+wxs}$$

が成り立つ。



これが内分の公式の almost な一般化である。実際に $y=w=0$，$x=z=1$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{t\overrightarrow{\mathrm{BO}}+s\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{s+t}$$

が成り立つ。

公式 2nd OVF も覚え方は，図をかいて，クロスしながら数値を掛けたり足したりすればよい。

なお，$w=0$，$z=1$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{xt\overrightarrow{\mathrm{BO}}+xs\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{sx+xt+ty}=\frac{x(t\overrightarrow{\mathrm{BO}}+s\overrightarrow{\mathrm{BA}})}{x(s+t)+ty}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{-xt\overrightarrow{\mathrm{OB}}+xs\overrightarrow{\mathrm{OA}}-xs\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(xt+yt+xs)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{xt+yt+xs}$$

$$=\frac{sx\overrightarrow{\mathrm{OA}}+ty\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{sx+xt+ty}$$

を得る。これは，**1st OVF** に他ならない。

証明 (2nd OVF)

次を満たす実数 k，u が存在する。

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{t}{s+t}k\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\frac{s}{s+t}k\overrightarrow{\mathrm{BA}},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{BD}}+u\overrightarrow{\mathrm{BE}}$$

$$=\frac{x}{x+y}(1-u)\overrightarrow{\mathrm{BO}}+\frac{z}{z+w}u\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{BO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ は一次独立であるから

$$\frac{t}{s+t}k=\frac{x}{x+y}(1-u),\quad \frac{s}{s+t}k=\frac{z}{z+w}u$$

よって

$$\frac{x}{t(x+y)}(1-u)=\frac{1}{s+t}k=\frac{z}{s(z+w)}u$$

両端から

$$\left(\frac{z}{s(z+w)}+\frac{x}{t(x+y)}\right)u=\frac{x}{t(x+y)}$$

両辺に $st(x+y)(z+w)$ を掛けて

$$\{zt(x+y)+xs(z+w)\}u=xs(z+w)$$

したがって

$$u=\frac{xs(z+w)}{xzt+yzt+zxs+wxs} \quad \cdots\cdots①$$

更に $\displaystyle \frac{1}{s+t}k=\frac{xz}{xzt+yzt+zxs+wxs}$　……②

以上より，①，②から

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{xzt\overrightarrow{\mathrm{BO}}+zxs\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{xzt+yzt+zxs+wxs}$$

$$=\frac{xz(t\overrightarrow{\mathrm{BO}}+s\overrightarrow{\mathrm{BA}})}{xz(s+t)+yzt+wxs}$$

を得る。 終

最後に，**【問題 2】**を **2nd OVF** を用いて計算する。

【解答】

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を求める。

2nd OVF より

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{1\cdot3\cdot3\overrightarrow{\mathrm{BO}}+3\cdot1\cdot2\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{1\cdot3\cdot3+1\cdot3\cdot3+3\cdot1\cdot2+2\cdot1\cdot2}$$

$$=\frac{9\overrightarrow{\mathrm{BO}}+6\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{28}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{-9\overrightarrow{\mathrm{OB}}+6\overrightarrow{\mathrm{OA}}-6\overrightarrow{\mathrm{OB}}+28\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{28}$$

$$=\frac{6\overrightarrow{\mathrm{OA}}+13\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{28}$$

終

§4. 最後に

1st OVF として紹介した最初の公式は，覚えやすさが感動できる部分である。2nd OVF は覚えられるが，多くの人が感動できるとは言えない。しかし，内分の公式(さらに 1st OVF)の almost な一般化である点と，よく出る問題に対応できるという観点から紹介することにした。

《参考文献》

〔1〕「改訂版　4 STEP　数学Ⅱ＋B〔ベクトル，数列〕」 数研出版