中線の長さの求め方
～別解とその一般化～

服部(はっとり)　慎吾(しんご)

§1．はじめに

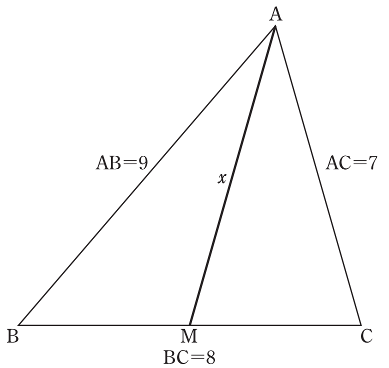
次のような問題がある。

問題　△ABC において，辺 BC の中点を M とする。
(1)　$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$（**中線定理**）が成り立つことを証明せよ。
(2)　AB＝9，BC＝8，CA＝7 のとき，線分 AM の長さを求めよ。

解法のセオリーとしては，まず小問(1)を証明し，小問(2)は(1)で証明した中線定理の式を使い線分 AM の長さを求める。それをあえて(2)を解く際，(1)を使わない解法について考えてみた。その後，それらを一般化したものを紹介する。

§2．中線を求める解法

問題　△ABC において，辺 BC の中点を M とする。AB＝9，BC＝8，CA＝7 のとき，線分 AM の長さを求めよ。



※ AM＝x とする。

（解法①）　△**AMB** と △**AMC** に余弦定理

【解答】
∠AMB＝θ とおくと　　∠AMC＝$180°-\theta$
△AMB において，余弦定理により
$AB^2=x^2+BM^2-2\cdot x\cdot BM\cdot\cos\theta$
$81=x^2+16-8x\cos\theta$　…… ①
△AMC において，余弦定理により
$AC^2=x^2+CM^2-2\cdot x\cdot CM\cdot\cos(180°-\theta)$
$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ より
$49=x^2+16+8x\cos\theta$　…… ②
①，②の辺々を加えて
$130=2x^2+32$
$x^2=49$
$x>0$ より　　$x=7$
よって　　AM＝7

（解法②）　ベクトルの内積

【解答】
∠AMB＝θ とおくと　　∠AMC＝$180°-\theta$
$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MA}=|\overrightarrow{MB}||\overrightarrow{MA}|\cos\theta$
$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}=|\overrightarrow{MC}||\overrightarrow{MA}|\cos(180°-\theta)$
ここで，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}$ より
$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}|^2$
$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{MB}|^2-2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MA}+|\overrightarrow{MA}|^2$
$81=16-8x\cos\theta+x^2$　…… ①
また，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}$ より
$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}|^2$
$|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{MC}|^2-2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}+|\overrightarrow{MA}|^2$
$49=16-8x\cos(180°-\theta)+x^2$
$49=16+8x\cos\theta+x^2$　…… ②
①，②の辺々を加えて
$130=2x^2+32$
$x^2=49$

$x>0$ より　　$x=7$

よって　　　AM$=7$

（解法③）　△ABC と △AMB に余弦定理

【解答】

△ABC において，余弦定理により

$$AC^2=AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot \cos B$$

$$49=81+64-144\cos B$$

$$\cos B=\frac{2}{3}$$

次に △AMB において，余弦定理により

$$AM^2=AB^2+BM^2-2\cdot AB\cdot BM\cdot \cos B$$

$$x^2=81+16-2\cdot 9\cdot 4\cdot \frac{2}{3}$$

$$x^2=49$$

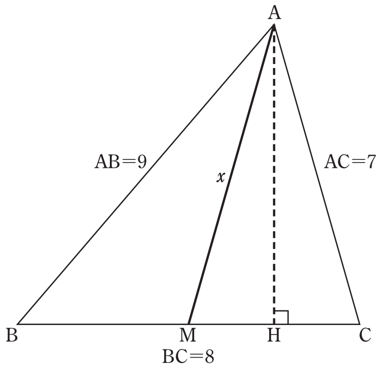
$x>0$ より　　$x=7$

よって　　　AM$=7$

※同様に △ABC と △AMC に余弦定理を使う方法もある。

（解法④）　三平方の定理

【解答】



点Aから辺 BC に垂線 AH を引き，BH$=h$ とする。

△ABH において，三平方の定理により

$$AH^2=AB^2-BH^2=81-h^2 \qquad \cdots\cdots ①$$

△ACH において，三平方の定理により

$$AH^2=AC^2-CH^2=49-(8-h)^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

①，②より　　$h=6$

これを，①に代入して

$$AH^2=45$$

また　　MH$=$BH$-$BM$=6-4=2$

△AMH において，三平方の定理により

$$AM^2=AH^2+MH^2$$

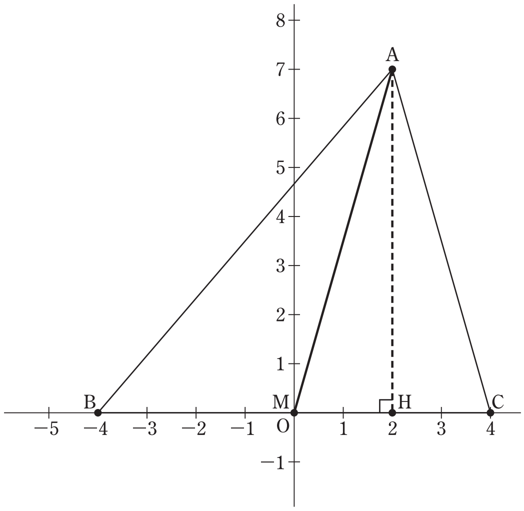
$$x^2=45+4=49$$

$x>0$ より　　$x=7$

よって　　　AM$=7$

（解法⑤）　座標平面

【解答】



座標平面において，点 M が原点，点Bと点Cが x 軸上にくるようにとると，点 B$(-4,\ 0)$，点 C$(4,\ 0)$，点 M$(0,\ 0)$ となる。

点 A$(\alpha,\ \beta)$ とすると，求める長さは，

点 A$(\alpha,\ \beta)$ と点 M$(0,\ 0)$ の距離であるから

$$x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \qquad \cdots\cdots ①$$

ここで，AB の長さについて，

AB$=\sqrt{BH^2+AH^2}$　より

$$AB^2=BH^2+AH^2$$

$$9^2=\{\alpha-(-4)\}^2+\beta^2$$

$$\alpha^2+8\alpha+16+\beta^2=81 \qquad \cdots\cdots ②$$

また，AC の長さについて，

AC$=\sqrt{CH^2+AH^2}$　より

$$AC^2=CH^2+AH^2$$

$$7^2=(\alpha-4)^2+\beta^2$$

$$\alpha^2-8\alpha+16+\beta^2=49 \qquad \cdots\cdots ③$$

②，③の辺々を引いて　　$16\alpha=32$

よって　　$\alpha=2$

これを②に代入すると　　$\beta=3\sqrt{5}$

ゆえに，点Aの座標は　　$(2,\ 3\sqrt{5})$

①に代入すると　　$x=\sqrt{2^2+(3\sqrt{5})^2}=\sqrt{49}$

$x>0$ より　　$x=7$

よって　　　AM$=7$

（解法⑥）　複素数平面

【解答】

複素数平面において，点 M が原点，点Bと点Cが実軸上にくるようにとると，点 B(-4)，点 C(4)，点 M(0) となる。点 A$(\alpha+\beta i)$ (α, β は実数) とすると，求める長さは，点 A$(\alpha+\beta i)$ と点 M(0) の距離であるから

$$x=|\alpha+\beta i|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad \cdots\cdots ①$$

ここで，2 点 A，B 間の距離について

$|\mathrm{AB}|=|\alpha+\beta i-(-4)|$ より

$$|\mathrm{AB}|^2=|(\alpha+4)+\beta i|^2$$
$$9^2=(\alpha+4)^2+\beta^2$$
$$\alpha^2+8\alpha+16+\beta^2=81 \quad \cdots\cdots ②$$

また，2 点 A，C 間の距離について

$|\mathrm{AC}|=|\alpha+\beta i-4|$ より

$$|\mathrm{AC}|^2=|(\alpha-4)+\beta i|^2$$
$$7^2=(\alpha-4)^2+\beta^2$$
$$\alpha^2-8\alpha+16+\beta^2=49 \quad \cdots\cdots ③$$

②，③の辺々を引いて　　$16\alpha=32$

よって　　$\alpha=2$

これを②に代入すると　　$\beta=3\sqrt{5}$

ゆえに，点Aの座標は　　$(2+3\sqrt{5}\,i)$

①に代入すると　　$x=\sqrt{2^2+(3\sqrt{5}\,)^2}=\sqrt{49}$

$x>0$ より　　$x=7$

よって　　$\mathrm{AM}=7$

（解法⑦）　中線定理

【解答】

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$ より

$$9^2+7^2=2(x^2+4^2)$$
$$x^2=49$$

$x>0$ より　　$x=7$

よって　　$\mathrm{AM}=7$

§3. 一般化

問題　△ABC において，辺 BC の中点を M とする。$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ のとき，線分 AM の長さを求めよ。

※ $\mathrm{AM}=x$ とする。

（解法①の一般化）　△AMB と △AMC に余弦定理

【解答】

$\angle\mathrm{AMB}=\theta$ とおくと　　$\angle\mathrm{AMC}=180^\circ-\theta$

△AMB において，余弦定理により

$$\mathrm{AB}^2=x^2+\mathrm{BM}^2-2\cdot x\cdot \mathrm{BM}\cdot\cos\theta$$
$$c^2=x^2+\frac{a^2}{4}-ax\cos\theta \quad \cdots\cdots ①$$

△AMC において，余弦定理により

$$\mathrm{AC}^2=x^2+\mathrm{CM}^2-2\cdot x\cdot \mathrm{CM}\cdot\cos(180^\circ-\theta)$$

$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$ より

$$b^2=x^2+\frac{a^2}{4}+ax\cos\theta \quad \cdots\cdots ②$$

①，②の辺々を加えて

$$b^2+c^2=2x^2+\frac{a^2}{2}$$
$$x^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$x>0$ より　　$x=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$

よって　　$\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$

（解法③の一般化）　△ABC と △AMB に余弦定理

【解答】

△ABC において，余弦定理により

$$\mathrm{AC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\cos B$$
$$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$$
$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

次に △AMB において，余弦定理により

$$\mathrm{AM}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BM}^2-2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BM}\cdot\cos B$$
$$x^2=c^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\cdot c\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$
$$=c^2+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2+c^2-b^2}{2}$$
$$=\frac{4c^2+a^2-2a^2-2c^2+2b^2}{4}$$
$$=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$x>0$ より　　$x=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$

よって　　$\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$

※同様に △ABC と △AMC に余弦定理を使う方法もある。

（解法④の一般化） 三平方の定理

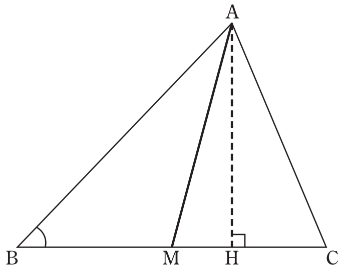
【解答】

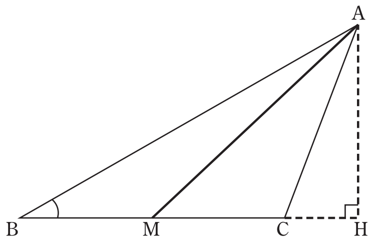
点Aから辺 BC に垂線 AH を引き，BH$=h$ とする。

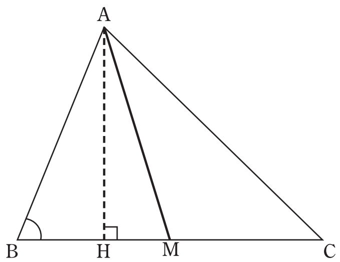
△ABH において，三平方の定理により

$\mathrm{AH}^2=\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2=c^2-h^2$ …… ①

[1] $0°<B<90°$（下図のいずれかの形）のとき







△ACH において，三平方の定理により

$\mathrm{AH}^2=\mathrm{AC}^2-\mathrm{CH}^2=b^2-|a-h|^2$ …… ②

①，②より　$h=\dfrac{a^2-b^2+c^2}{2a}$

また　$\mathrm{MH}=|\mathrm{BH}-\mathrm{BM}|=\left|h-\dfrac{a}{2}\right|$

△AMH において，三平方の定理により

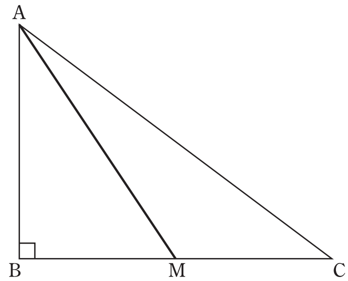
$\mathrm{AM}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{MH}^2$

$\mathrm{AM}^2=(c^2-h^2)+\left|h-\dfrac{a}{2}\right|^2$

$x^2=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$

$x>0$ より　$x=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$

[2] $B=90°$（下図）のとき



△ABM において，三平方の定理により

$\mathrm{AM}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BM}^2$

$x^2=c^2+\dfrac{a^2}{4}$

$=\dfrac{2c^2+2c^2+a^2}{4}$

△ABC において，三平方の定理により

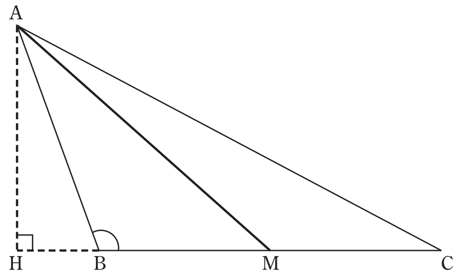
$c^2=b^2-a^2$ であるから

$x^2=\dfrac{2c^2+2(b^2-a^2)+a^2}{4}$

$=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$

$x>0$ より　$x=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$

[3] $90°<B<180°$（下図）のとき



△ACH において，三平方の定理により

$\mathrm{AH}^2=\mathrm{AC}^2-\mathrm{CH}^2=b^2-(a+h)^2$ …… ③

①，③より　$h=\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2a}$

また　$\mathrm{MH}=\mathrm{BH}+\mathrm{BM}=h+\dfrac{a}{2}$

△AMH において，三平方の定理により

$\mathrm{AM}^2=\mathrm{AH}^2+\mathrm{MH}^2$

$\mathrm{AM}^2=(c^2-h^2)+\left(h+\dfrac{a}{2}\right)^2$

$$x^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$x>0$ より　　$x=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$

[1]〜[3] より　　$\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$

（解法⑦の一般化）　中線定理

【解答】

$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$ より

$$c^2+b^2=2\left(x^2+\frac{a^2}{4}\right)$$

$$x^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$$

$x>0$ より　　$x=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$

よって　　$\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$

§4. 考察

解法①：中線の性質と余弦定理をうまく利用した解法で，$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$ であることから辺々を加えるときれいに消えるので計算量は比較的少なく済む。

解法②：ベクトルを使っているだけで，考え方の本質は**解法**①と同じであるので一般化は省略した。

解法③：最初の余弦定理で cos の値を求め，その値を次の余弦定理で使い中線の長さを求める。値によっては計算が大変になる。

解法④：最初の練習問題のように具体的な値が与えられていればさほど大変ではない。しかし，一般化する際には場合分けをしなければならないので注意が必要。

解法⑤⑥：座標平面（もしくは複素数平面）上の点と点の距離の公式を使っているだけで，考え方の本質は**解法**④と同じであるので一般化は省略した。場合分けのことを考えるとこちらの方が一般化は容易である。

解法⑦：定理を使うだけなので覚えていれば便利である。

今回一般化して求めた $\mathrm{AM}=\dfrac{\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}}{2}$ を公式として覚えておくと検算などの際に役に立つ。

§5. おわりに

元々個人的興味で始めた取り組みだが，やってみてこれはこのまま授業で扱えるのではと思ったので今回紹介することにした。この教材を授業で扱うことは十分に可能である。例えば，「中線の求め方をできるだけ見つけなさい」と発問し，別解を考えさせる。こうすることで数学的な見方・考え方が身についていく。また，一般化までやってみることで三角形の中線の深い理解につながり，考える力の育成にもつながるはずである。ぜひ，読まれて共感された方は授業で実践していただけたら幸いである。

《参考文献》

〔1〕「新課程　チャート式　基礎からの数学Ⅰ＋A」 数研出版

（滋賀県立守山高等学校）