漸化式でつながるピタゴラス数

木村（きむら）　嘉宏（よしひろ）

§1. はじめに

三平方の定理 $X^2+Y^2=Z^2$ を満たす自然数の組 X, Y, Z を**ピタゴラス数**という。ピタゴラス数は直角三角形の 3 辺の長さになり，Z が斜辺である。

これから一定の条件を満たすピタゴラス数，つまり直角三角形のグループを作ってみる。高校生の探究活動の題材として，耐え得るものになれば幸いである。

以降，簡単のため X, Y, Z がピタゴラス数であるとき，$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z})$ と表すことにする。ただし，$X<Y<Z$ とする。

§2. $\boldsymbol{Z-Y=1}$ のとき

$(X, Y, Z)=(3, 4, 5)$ は $Z-Y=1$ を満たす。$Z-Y=1$ を満たすピタゴラス数は無数にある。

$Z-Y=1$ のとき，$Y=Z-1$ であるから

$$X^2=Z^2-Y^2=Z^2-(Z-1)^2=2Z-1$$

$2Z-1$ は奇数の平方数であるから，X は奇数である。

$X=2n-1$ とすると

$$2Z-1=(2n-1)^2=4n^2-4n+1$$

これより　$Z=2n^2-2n+1$, $Y=2n^2-2n$

$n=1$ のときは $Y=0$ であるからピタゴラス数にならないが，$n=2, 3, 4, \cdots\cdots$ とするとピタゴラス数が得られる。

$n=2, 3, 4, 5, 6, 7$ のとき，次の表のようになる。

n	X	Y	Z
2	3	4	5
3	5	12	13
4	7	24	25
5	9	40	41
6	11	60	61
7	13	84	85

§3. $\boldsymbol{Y-X=1}$ のとき

$(3, 4, 5)$ のように $Y-X=1$ を満たすピタゴラス数を調べてみよう。直角をはさむ 2 辺の長さの差が 1 の直角三角形のグループである。

$Y-X=1$, $X^2+Y^2=Z^2$ を満たすような自然数 X, Y, Z を表計算ソフトを用いて調べたところ，$(3, 4, 5)$, $(20, 21, 29)$, $(119, 120, 169)$ を得た。

これら相互の関係を調べてみる。

ピタゴラス数は 2 つの自然数 a, b により a^2-b^2, $2ab$, a^2+b^2 と表せる。

上の 3 例の場合は，次の表の通りである。

X	Y	Z	a	b
3	4	5	2	1
20	21	29	5	2
119	120	169	12	5

$(X, Y, Z)=(a^2-b^2, 2ab, a^2+b^2)$

または　$(2ab, a^2-b^2, a^2+b^2)$

§4. 漸化式の導入

§3 で示した表について，上から第 n 行目の数を左から順に $\boldsymbol{X_n}$, $\boldsymbol{Y_n}$, $\boldsymbol{Z_n}$, $\boldsymbol{a_n}$, $\boldsymbol{b_n}$ とする。

表の範囲において，次の漸化式が成立することが確認できる。

$a_1=2$, $b_1=1$

$b_{k+1}=a_k$

$a_{k+1}=a_k+b_k+b_{k+1}=2a_k+b_k$ $(k=1, 2)$

漸化式に $k=3, 4, 5$ を代入すると，次のように表を拡張できる。

n	X_n	Y_n	Z_n	a_n	b_n
1	3	4	5	2	1
2	20	21	29	5	2
3	119	120	169	12	5
4	696	697	985	29	12
5	4059	4060	5741	70	29
6	23660	23661	33461	169	70

$(X_n,\ Y_n,\ Z_n)=(a_n{}^2-b_n{}^2,\ 2a_nb_n,\ a_n{}^2+b_n{}^2)$

または　$(2a_nb_n,\ a_n{}^2-b_n{}^2,\ a_n{}^2+b_n{}^2)$

表の範囲 ($n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$) において

$Y_n-X_n=1$, $X_n{}^2+Y_n{}^2=Z_n{}^2$ が成立する。

§5. すべての自然数 n についての証明

漸化式により，§4の表を拡張した場合を考察する。

$(a_n{}^2-b_n{}^2)^2+(2a_nb_n)^2=(a_n{}^2+b_n{}^2)^2$ は恒等式であるから，$X_n{}^2+Y_n{}^2=Z_n{}^2$ は常に成立する。

すべての自然数 n について，$Y_n-X_n=1$ が成立することを数学的帰納法で証明する。

【証明】

(i)　$n=1$ のとき　$Y_1-X_1=4-3=1$

(ii)　$n=k$ のとき $Y_k-X_k=1$ と仮定すると

$$Y_k-X_k=|a_k{}^2-b_k{}^2-2a_kb_k|=1$$

$n=k+1$ のとき

$$\begin{aligned}&Y_{k+1}-X_{k+1}\\&=|a_{k+1}{}^2-b_{k+1}{}^2-2a_{k+1}b_{k+1}|\\&=|(2a_k+b_k)^2-a_k{}^2-2(2a_k+b_k)a_k|\\&=|4a_k{}^2+4a_kb_k+b_k{}^2-a_k{}^2-4a_k{}^2-2a_kb_k|\\&=|-a_k{}^2+b_k{}^2+2a_kb_k|\\&=|-(a_k{}^2-b_k{}^2-2a_kb_k)|\\&=1\end{aligned}$$

(i)(ii)より，すべての自然数 n について

$Y_n-X_n=1$ が成立する。

§6. 一般項の考察

$a_1=2,\ b_1=1$

$a_{n+1}=2a_n+b_n,\ b_{n+1}=a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

から数列 $\{a_n\}$ 及び $\{b_n\}$ の一般項を求めてみる。

$n\geqq 2$ のとき $b_n=a_{n-1}$ であるから

$$a_{n+1}=2a_n+a_{n-1} \quad \cdots\cdots①$$

①は $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$ を満たす α, β により次のように変形できる。

$$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha(a_n-\beta a_{n-1})$$
$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})$$

α, β は，2次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解であるから $\alpha=1+\sqrt{2}$, $\beta=1-\sqrt{2}$ とすると $\alpha^2=3+2\sqrt{2}$, $\beta^2=3-2\sqrt{2}$ であるから

$$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha^{n-1}(a_2-\beta a_1)=\alpha^{n-1}(3+2\sqrt{2})=\alpha^{n+1}$$
$$a_{n+1}-\alpha a_n=\beta^{n-1}(a_2-\alpha a_1)=\beta^{n-1}(3-2\sqrt{2})=\beta^{n+1}$$

2式の差をとると　$(\alpha-\beta)a_n=\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}$

$\alpha-\beta=2\sqrt{2}$ であるから　$a_n=\dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{2\sqrt{2}}$

したがって　$b_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{2}}$

これらは $n=1$ のときにも成立する。

$$\alpha^2-1=2+2\sqrt{2}=2\alpha$$
$$\alpha^2+1=4+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}\,\alpha$$
$$\beta^2-1=2-2\sqrt{2}=2\beta$$
$$\beta^2+1=4-2\sqrt{2}=-2\sqrt{2}\,\beta$$

に注意して計算すると

$$\begin{aligned}&a_n{}^2-b_n{}^2\\&=\frac{\alpha^{2n+2}-2(\alpha\beta)^{n+1}+\beta^{2n+2}}{8}-\frac{\alpha^{2n}-2(\alpha\beta)^n+\beta^{2n}}{8}\\&=\frac{\alpha^{2n}(\alpha^2-1)+\beta^{2n}(\beta^2-1)-2(-1)^{n+1}+2(-1)^n}{8}\\&=\frac{\alpha^{2n}\cdot 2\alpha+\beta^{2n}\cdot 2\beta+2(-1)^n+2(-1)^n}{8}\\&=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{4}+\frac{(-1)^n}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&2a_nb_n\\&=\frac{\alpha^{2n+1}-\alpha(\alpha\beta)^n-\beta(\alpha\beta)^n+\beta^{2n+1}}{4}\\&=\frac{\alpha^{2n+1}-(\alpha+\beta)(-1)^n+\beta^{2n+1}}{4}\\&=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}-2(-1)^n}{4}\\&=\frac{\alpha^{2n+1}+\beta^{2n+1}}{4}-\frac{(-1)^n}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a_n{}^2+b_n{}^2\\&=\frac{\alpha^{2n+2}-2(\alpha\beta)^{n+1}+\beta^{2n+2}}{8}+\frac{\alpha^{2n}-2(\alpha\beta)^n+\beta^{2n}}{8}\\&=\frac{\alpha^{2n}(\alpha^2+1)+\beta^{2n}(\beta^2+1)-2(-1)^{n+1}-2(-1)^n}{8}\\&=\frac{\alpha^{2n}\cdot 2\sqrt{2}\,\alpha-\beta^{2n}\cdot 2\sqrt{2}\,\beta+2(-1)^n-2(-1)^n}{8}\\&=\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$a_n{}^2-b_n{}^2-2a_nb_n=(-1)^n$ であるから

n が奇数のとき　$a_n{}^2-b_n{}^2<2a_nb_n$

n が偶数のとき　$a_n{}^2-b_n{}^2>2a_nb_n$

である。

§7. $\sqrt{2}$ の近似値

n を大きくするほど，$\dfrac{Y_n}{X_n}$ は限りなく 1 に近づき，
$\dfrac{Z_n}{X_n}$ と $\dfrac{Z_n}{Y_n}$ は限りなく $\sqrt{2}$ に近づく。

表計算ソフトで計算すると

$a_{10}=5741$，$b_{10}=2378$

$(X_{10},\ Y_{10},\ Z_{10})$
$=(27304196,\ 27304197,\ 38613965)$

$\dfrac{Z_{10}}{Y_{10}}<\sqrt{2}<\dfrac{Z_{10}}{X_{10}}$ であり

$$\frac{Z_{10}}{Y_{10}}=1.41421353\cdots\cdots$$

$$\frac{Z_{10}}{X_{10}}=1.41421358\cdots\cdots$$

である。

（京都府立峰山高等学校）