$$\frac{(\sqrt{8}+\sqrt{12}+\sqrt{20}-\sqrt{24})(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{10}+\sqrt{8})}$$

$$=\sqrt{\boxed{?}}$$

内藤（ないとう）　康正（やすまさ）

§1. はじめに

試行錯誤は思考力を高めるために欠かすことができませんが，生徒諸君から入学早々にそのチャンスを奪ってしまうのではないかと感じる例に下の**【問題 1】**があります。本稿では，根号の計算における様々な試行錯誤の可能性と，そこから得られる思いがけない等式を紹介できればと思います。

> **【問題 1】**
> $A=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化せよ。

時間に追われる進学校では，そもそも分母はホントに無理数なのか？と疑問を抱く間もなく次の**【解法 1】**を短時間でマスターしなくてはなりません。

> **【解法 1】　分母・分子に $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ を掛ける**
>
> $$A=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}\}}$$
> $$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(5+2\sqrt{6})-5}$$
> $$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$

分母・分子に $\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}$ でも $\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ でもなく $\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$ を掛けるのは，言うまでもなく 2+3=5 から計算が楽になることを見越してのことです。しかし，試行錯誤の時間は皆無に等しく，

「このような工夫をしないと変形できない。」

「$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ の分母は有理化できない。」

などの誤解を生むだけでなく，試行錯誤に時間をかけるよりも「早く答えの出るやり方を教えてほしい」という学習習慣につながる懸念を感じます。

生徒の実態によっては，分母・分子に $\sqrt{5}$ を掛けて

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{15}+5}=？？？$$

と計算し，さらにあわてて分母・分子に $\sqrt{10}$ を掛けて…という試行錯誤であっても大切にすべきと考えます。§3でご紹介する解法のように，我々が「そんなやり方ではできないよ」と決めつけてしまうことも危険です。

§2. その他の解法(1)

【問題 1】については，分母・分子に $\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}$ や $\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}$ を掛けても，次のようにさほど計算量が増えないことが分かります。

> **【解法 2】　分母・分子に $\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}$ を掛ける**
>
> $$A=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\{(\sqrt{3}+\sqrt{5})+\sqrt{2}\}\{(\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{2}\}}$$
> $$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}{(8+2\sqrt{15})-2}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2(3+\sqrt{15})}$$
> $$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{15}-3)}{2(15-9)}$$
> $$=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{15}-3)}{12}$$

> **【解法 3】　分母・分子に $\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}$ を掛ける**
>
> $$A=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{5})+\sqrt{3}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{5})-\sqrt{3}\}}$$
> $$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(7+2\sqrt{10})-3}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{10})}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{10}-2)}{2(10-4)}$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{10}-2)}{12}$$

【解法１】～**【解法３】**の計算の比較を経て初めて解法の選択へと進みたいものです。

さらに，**【解法１】**～**【解法３】**の分子を見ると

$$\left.\begin{aligned}&2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}\\&=(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{15}-3)\\&=(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{10}-2)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots①$$

という不思議な等式に気がつきます。単なる計算練習になりがちな３項の分母の有理化問題も，①を使えば

【問題】

$\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ の整数部分を求めよ。

といった味付けが可能となります。分母を有理化して調べる際に，まず，**【問題１】**の“模範”解答に倣って分母・分子に $(\sqrt{3}-\sqrt{2})-\sqrt{5}$ を掛けても良いが，分母が負になる煩わしさを避けるには？という課題があります。また，分母で

$$(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$=(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

というミスを犯さずに済むか，分子の平方根の計算を正確にできるか，最後に $\sqrt{15}-3$ の値の評価ができるか，といろいろな体験ができる一題です。

①のからくりを解明したいという生徒には，展開公式（あるいは因数分解の難問）

$$(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)$$
$$=2y^2z^2+2z^2x^2+2x^2y^2-x^4-y^4-z^4$$

を紹介する絶好のチャンスになります。具体的には，$\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ の分母の有理化を，この展開公式を利用して一般的に考えると見えてきます。**【問題１】**の式では

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$
$$=\frac{(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2(3\cdot5+5\cdot2+2\cdot3)-2^2-3^2-5^2}$$

となり，右辺分子にある３つの因数を２つと１つにどう分けるかで見掛けの違う３通りの表し方が得られるのです。

こうした寄り道は，有機的な学習の機会になるだけではなく，2023 年度京都大学入試で出題された３乗根を含む分母の有理化問題への足掛かりにもなると考えます。2022 年度には，富山大学の

ガウス記号 $\left[\sqrt{\sqrt[3]{3}+\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}-1}}\right]$

の値を求める問題もあります。

§3. その他の解法(2)

【問題１】では，悪戯のような試行錯誤も功を奏します。

【解法４】　分母・分子に $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ を掛ける

$$A=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(5+\sqrt{15}+\sqrt{10}+\sqrt{6})}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{2(5-3)(5-2)}$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{12}$$

一般に，$a+b=c$ のとき

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$$
$$=a+b+c+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}+2\sqrt{ab}$$
$$=2c+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}+2\sqrt{ab}$$
$$=2(\sqrt{c}+\sqrt{a})(\sqrt{c}+\sqrt{b})$$

ですから，**【問題１】**と同趣旨の有理化問題では

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$
$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{c}-\sqrt{a})(\sqrt{c}-\sqrt{b})}{2(c-a)(c-b)}$$

という**“公式”**を発見したことになります。§2 で得た不思議な等式①に１行追加です。

$$2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}$$
$$=(\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{15}-3)$$
$$=(\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{10}-2)$$
$$=(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$$

§4. 分母が 4 項

分母が 4 項になると試行錯誤経験の有無が現れ，自分の学習方法を見直すきっかけとなります。特に次の**【問題 2】**は**【問題 1】**より計算が簡単なことから，はやく答えの出し方を！という生徒に対してある種の説得力があります。

【問題 2】

$B=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ の分母を有理化せよ。

【解法 1】

$$B=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{6})-(2+\sqrt{3})}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{6})+(2+\sqrt{3})\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{6})-(2+\sqrt{3})\}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2-\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2-(2+\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}-2-\sqrt{3}}{(8+4\sqrt{3})-(7+4\sqrt{3})}$$
$$=\sqrt{2}+\sqrt{6}-2-\sqrt{3}$$

この問題は以前，等式

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$=(2-1)(3-2)=1$$

から作ったものです。その成り立ちを知らなければ気がつきにくいアイデアですが，次のような計算方法もあります。眼力のある生徒は時折見抜いて，満足そうな表情を見せてくれます。

【解法 2】

$$B=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(2-1)(3-2)}$$
$$=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

蛇足になりますが，無理数どうしの積が有理数になる例として $\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$ や $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$ は余計な説明も不要で手っ取り早いですが，驚きに欠けます。その点

$$(2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{6}-2-\sqrt{3})=1$$

などはインパクト十分ですし，$2+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ はホントに無理数なのか？といった疑問を抱かざるを得ません。

§5. アイデアを競う

同じ 4 項でも分母がすぐには因数分解できないのが**【問題 3】**です。ただ，$2+6=3+5$ が効いてきます。ここまでくるとアイデアを競う自由課題も楽しいかと思います。

【問題 3】

$C=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}$ の分母を有理化せよ。

【解法 1】

$$C=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{6}}{\{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})+\sqrt{6}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{6}\}}$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{6}}{2(2+\sqrt{6}+\sqrt{10}+\sqrt{15})}$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})-\sqrt{6}}{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}$$
$$=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{6}$$

【解法 2】

$$C=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\{(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{6}+\sqrt{2})\}\{(\sqrt{5}+\sqrt{3})-(\sqrt{6}+\sqrt{2})\}}$$
$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}(\sqrt{5}-2)}$$
$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+2)}{6}$$

この 2 通りの計算結果の分子の比較から

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{6})(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$
$$=\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+2)$$

2024 年にちなんで $\sqrt{5}-\sqrt{6}$ から $\sqrt{20}-\sqrt{24}$ を作り，さらに求値問題に直すと，次の年賀計算パズルの出来上がりです。

$$\frac{(\sqrt{8}+\sqrt{12}+\sqrt{\mathbf{20}}-\sqrt{\mathbf{24}})(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{10}+\sqrt{8})}$$
$$=\sqrt{\boxed{?}}$$

結果が根号一つで表されることはとても意外ですし，答えは令和 6 年にちなんで $\boxed{?}=6$ です。

§6. 結びにかえて

$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$ が無理数だからといってその和が無理数であることは決して当然ではありませんが，一般に平方数でない自然数 n_1，n_2，n_3，…，n_N に対して $\sqrt{n_1}+\sqrt{n_2}+\sqrt{n_3}+\cdots+\sqrt{n_N}$ は無理数であることが知られていることを知識として教えてもよいのではないかと思います。つまり**【問題 1 】**は間違いなく「無理数である分母」の有理化になります。

ただ，$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ に関しては次のような問題も考えられます。とにかくやってみるだけの試行錯誤から，見通しをもった試行錯誤の必要性を自覚させる問題にもなります。

【問題 4 】
$\sqrt{6}$ が無理数であることを利用して
$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ が無理数であることを証明せよ。

$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ が有理数 r を用いて

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}=r$$

と書けたと仮定して矛盾を導きますが，$\sqrt{6}$ が無理数であることを利用するために試行錯誤が必要です。

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=r-\sqrt{5}$$

として両辺を 2 乗して整理すると

$$5+2\sqrt{6}=r^2-2r\sqrt{5}+5$$

$$2r\sqrt{5}=r^2-2\sqrt{6}$$

再び両辺を 2 乗して整理すると，$\sqrt{6}$ が r の有理式となって矛盾です。

冒頭の繰り返しになりますが，試行錯誤なしに思考力は身につきませんし，なにより計算を楽しむことで見慣れぬ風景や根源的な疑問にも触れることができ，3 年間の学習の原動力となるものと信じます。

（東京都立立川高等学校）