2^n の位に現れる数と確率

伊藤　裕（いとう　ゆたか）

§1. はじめに

2^n の一の位の数，最高位の数を求める問題は多くの教科書や問題集に載っている。本稿では，上の問題から自然に得られる確率について調べ，考えたことをまとめた。

有名な話題なので既出の内容ばかりかもしれませんが，ご容赦ください。

§2. 一の位の数と確率

2^n の一の位は 4 つの数 2，4，8，6 を順に繰り返す。任意に 1 つの自然数を選ぶとき，その選んだ自然数を 4 で割った余りが 0，1，2，3 であることは同じ割合で起こると考えてよい。

よって，任意に 1 つの自然数 n を選ぶとき，2^n の一の位が 2，4，8，6 である確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ と考えることができる。

§3. 最高位の数と確率

ここでは任意に 1 つの自然数 n を選ぶとき，2^n の最高位に m（m は自然数，$1 \leqq m \leqq 9$）が現れる確率を考える。

無理数 α と自然数 n に対して，$n\alpha$ の小数部分を $\{n\alpha\}$ で表す。まず，次の **[定理 1]** が成り立つ（参考文献〔1〕）。

> **[定理 1]**　任意の $0 \leqq r < 1$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある自然数 n が存在して
> $$|\{n\alpha\} - r| < \varepsilon$$
> が成り立つ。

この定理は，区間 $[0,\ 1)$ の任意の数のいくらでも近くに $\{n\alpha\}$ が存在すること，つまり $\{n\alpha\}$ は区間 $[0,\ 1)$ に稠密に分布していることを示している。

さらに，次の **[定理 2]** が成り立つ（参考文献〔2〕）。

> **[定理 2]**（**Weyl の一様分布定理**）
> $\{n\alpha\}$ は区間 $[0,\ 1)$ に一様に分布する。

[定理 1] からは，$\{n\alpha\}$ の区間 $[0,\ 1)$ における分布の仕方は稠密であることしか分からないが，**[定理 2]** はその分布の仕方は均等で偏りがないことを示している。それぞれの定理の証明は省略するが，**[定理 1]** については高校数学の範囲で十分証明可能である。

ここで

$$
\begin{aligned}
& 2^n \text{ は } N \text{ 桁で最高位の数は } m \\
\Longleftrightarrow\ & 10^{N-1} \times m \leqq 2^n < 10^{N-1} \times (m+1) \\
\Longleftrightarrow\ & (N-1) + \log_{10} m \leqq \log_{10} 2^n \\
& \qquad < (N-1) + \log_{10}(m+1) \\
\Longleftrightarrow\ & \log_{10} m \leqq \{n \log_{10} 2\} < \log_{10}(m+1)
\end{aligned}
$$

更に，$\log_{10} 2$ は無理数であるので，**[定理 2]** から $\{n\log_{10} 2\}$ は区間 $[0,\ 1)$ に均等に分布している。

よって，任意に 1 つの自然数 n を選ぶとき，2^n の最高位が m である確率は，区間 $[0,\ 1)$ の長さの中に区間 $[\log_{10} m,\ \log_{10}(m+1))$ の長さの占める割合，つまり区間 $[\log_{10} m,\ \log_{10}(m+1))$ の長さと考えてよい。

以上の議論から，任意に 1 つの自然数 n を選ぶとき，2^n の最高位に m が現れる確率は

$$
\begin{aligned}
\log_{10}(m+1) - \log_{10} m &= \log_{10} \frac{m+1}{m} \\
&= \log_{10}\left(1 + \frac{1}{m}\right)
\end{aligned}
$$

である。

$m=1$ とすれば，2^n の最高位に 1 が現れる確率は $\log_{10} 2$ である。自然な問いから確率が $\log_{10} 2$ になる例が得られるのは面白い。

また，2^n の最高位に m が現れる確率を $\boldsymbol{P}_m$ と表せば，正の数 x に対して関数 $y = 1 + \dfrac{1}{x}$ は単調減少であり，底 $10 > 1$ であるから

$$P_1>P_2>P_3>\cdots\cdots>P_9$$

が分かる。2^n の最高位の数を見ていくと，明らかに 1 が現れることが多く，逆に 8 や 9 はあまり現れないので改めて納得がいく。

§4. 最高位の次の位の数と確率

ここでは任意に 1 つの自然数 n を選ぶとき，2^n の最高位の次の位に m (m は整数，$0\leqq m\leqq 9$) が現れる確率を考える。2^n の最高位の次の位に m が現れる確率を $\boldsymbol{P(1,\ m)}$ と表す。2^n の最高位の次の位に m が現れる場合は次の 9 通りが考えられる。

[1]　最高位の数が 1 で，次の位の数が m

[2]　最高位の数が 2 で，次の位の数が m

……

[9]　最高位の数が 9 で，次の位の数が m

2^n を N 桁の数として $\beta=\{n\log_{10}2\}$ とおくとき $2^n=10^{N-1}\times 10^{\beta}$ であるから，事象[1]の場合を考えると

$$\begin{aligned}[1] &\iff 1+\frac{m}{10}\leqq 10^{\beta}<1+\frac{m+1}{10}\\ &\iff \log_{10}\left(1+\frac{m}{10}\right)\leqq\beta\\ &\qquad =\{n\log_{10}2\}<\log_{10}\left(1+\frac{m+1}{10}\right)\end{aligned}$$

よって，§3 と同様に考えて事象[1]が起こる確率は

$$\log_{10}\left(1+\frac{m+1}{10}\right)-\log_{10}\left(1+\frac{m}{10}\right)$$
$$=\log_{10}\frac{10\cdot 1+(m+1)}{10\cdot 1+m}=\log_{10}\left(1+\frac{1}{10\cdot 1+m}\right)$$

である。事象[2]〜[9]についても同様であり，これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(1,\ m)=\sum_{l=1}^{9}\log_{10}\left(1+\frac{1}{10l+m}\right)$$

である。

ここだけの表現として，$l+\dfrac{m}{10}$ を $\boldsymbol{l.m}$ と表し

$$9.m\times 8.m\times 7.m\times\cdots\cdots\times 1.m=(9.m)!$$

と表すことにすれば，求める確率は

$$P(1,\ m)=\log_{10}\frac{(9.(m+1))!}{(9.m)!}$$

と表すこともできる。

また，正の数 x に対して関数 $y=1+\dfrac{1}{10l+x}$ (l は自然数)は単調減少であるので，§3 と同様に

$$P(1,\ 0)>P(1,\ 1)>P(1,\ 2)>\cdots\cdots>P(1,\ 9)$$

が分かる。

§5. 最高位から k 番目の位の数と確率

§4 の結果は簡単に一般化できるので，ここで述べておく。k を自然数として，最高位から k 番目の位に m が現れる確率を $\boldsymbol{P(k,\ m)}$ と表す。2^n の最高位から k 番目の位に m が現れる場合は次の $9\times 10^{k-1}$ 通りが考えられる。

[10^{k-1}]　最高位から 10……0 と並び，次の位の数が m

[$10^{k-1}+1$]　最高位から 10……1 と並び，次の位の数が m

……

[10^k-1]　最高位から 99……9 と並び，次の位の数が m

(最高位から並ぶ数は，10^{k-1} から $10^k-1=99\cdots\cdots 9$ までのすべての自然数が現れる)

すると，§4 と同様に事象[10^{k-1}]について

$$[10^{k-1}] \iff \log_{10}\left(\frac{10^{k-1}}{10^{k-1}}+\frac{m}{10^k}\right)\leqq\{n\log_{10}2\}$$
$$<\log_{10}\left(\frac{10^{k-1}}{10^{k-1}}+\frac{m+1}{10^k}\right)$$

であるから，事象[10^{k-1}]の起こる確率は

$$\log_{10}\left(\frac{10^{k-1}}{10^{k-1}}+\frac{m+1}{10^k}\right)-\log_{10}\left(\frac{10^{k-1}}{10^{k-1}}+\frac{m}{10^k}\right)$$
$$=\log_{10}\frac{10\cdot 10^{k-1}+m+1}{10\cdot 10^{k-1}+m}$$
$$=\log_{10}\left(1+\frac{1}{10\cdot 10^{k-1}+m}\right)$$

となる。同様に，事象[$10^{k-1}+1$]の起こる確率は

$$\log_{10}\left(\frac{10^{k-1}+1}{10^{k-1}}+\frac{m+1}{10^k}\right)$$
$$-\log_{10}\left(\frac{10^{k-1}+1}{10^{k-1}}+\frac{m}{10^k}\right)$$
$$=\log_{10}\left\{1+\frac{1}{10(10^{k-1}+1)+m}\right\}$$

である。他の事象についても同様であり，これらの事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$P(k,\ m)=\sum_{l=10^{k-1}}^{10^k-1}\log_{10}\left(1+\frac{1}{10l+m}\right)$$

である。そして，§4 と同じ理由で

$$P(k,\ 0)>P(k,\ 1)>P(k,\ 2)>\cdots\cdots>P(k,\ 9)$$

が分かる。

§6. §5の確率と極限

§8［**補足2**］の表の数値を見ると，任意の m に対して

$$\lim_{k\to\infty}P(k,\ m)=\frac{1}{10}$$

と予想される。k が大きくなればなるほど，$P(k,\ m)$ は最高位から $k-1$ 番目までに並ぶ数の影響を大きく受けることになるので，これは感覚的にも当然だと思われる。以下，これを示す。

$f(x)$ を単調減少で正値な連続関数，a，b を自然数としたとき，数学Ⅲでもよく用いる面積による評価

$$\int_a^{b+1}f(x)\,dx<\sum_{l=a}^{b}f(l)<\int_{a-1}^{b}f(x)\,dx \quad \cdots\cdots(※)$$

を思い出しておく。今回は

$$f(x)=\log_{10}\left(1+\frac{1}{10x+m}\right),\ a=10^{k-1},$$

$$b=10^k-1$$

として，評価(※)を利用する。積分を計算するために

$$f(x)=\frac{1}{\log 10}\{\log(10x+m+1)-\log(10x+m)\}$$

と変形する。ただし，底は e である。

$$\int\log(10x+m)\,dx$$

$$=\int\frac{1}{10}(10x+m)'\log(10x+m)\,dx$$

$$=\frac{1}{10}(10x+m)\log(10x+m)-\int dx$$

$$=\frac{1}{10}(10x+m)\log(10x+m)-x$$

同様に

$$\int\log(10x+m+1)\,dx$$

$$=\frac{1}{10}(10x+m+1)\log(10x+m+1)-x$$

よって

$$\int f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{10\log 10}\{(10x+m+1)\log(10x+m+1)$$
$$-(10x+m)\log(10x+m)\}$$

$$=\frac{1}{10\log 10}\{(10x+m)(\log(10x+m+1)$$
$$-\log(10x+m))+\log(10x+m+1)\}$$

$$=\frac{1}{10\log 10}\left\{\log\left(1+\frac{1}{10x+m}\right)^{10x+m}\right.$$
$$\left.+\log(10x+m+1)\right\}$$

(これらの計算では積分定数は省略した)

次に，定積分 $\int_a^{b+1}f(x)\,dx$ と $\int_{a-1}^{b}f(x)\,dx$ を求めると

$$\int_a^{b+1}f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{10\log 10}\left\{\log\left(1+\frac{1}{10^{k+1}+m}\right)^{10^{k+1}+m}\right.$$
$$\left.-\log\left(1+\frac{1}{10^k+m}\right)^{10^k+m}+\log\frac{10^{k+1}+m+1}{10^k+m+1}\right\}$$

$$\int_{a-1}^{b}f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{10\log 10}\left\{\log\left(1+\frac{1}{10^{k+1}+m-10}\right)^{10^{k+1}+m-10}\right.$$
$$-\log\left(1+\frac{1}{10^k+m-10}\right)^{10^k+m-10}$$
$$\left.+\log\frac{10^{k+1}+m-9}{10^k+m-9}\right\}$$

そして，自然対数の底 e の定義に注意すると

$$\lim_{k\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{10^{k+1}+m}\right)^{10^{k+1}+m}=\log e=1,$$

$$\lim_{k\to\infty}\log\frac{10^{k+1}+m+1}{10^k+m+1}=\lim_{k\to\infty}\log\left(\frac{10+\dfrac{m+1}{10^k}}{1+\dfrac{m+1}{10^k}}\right)$$

$$=\log 10$$

他の部分の極限についても同様であるから

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^{b+1}f(x)\,dx=\frac{1}{10\log 10}(1-1+\log 10)=\frac{1}{10},$$

$$\lim_{k\to\infty}\int_{a-1}^{b}f(x)\,dx=\frac{1}{10}$$

よって，評価(※)とはさみうちの原理により

$$\lim_{k\to\infty}P(k,\ m)=\lim_{k\to\infty}\sum_{l=a}^{b}f(l)=\frac{1}{10}$$

を得る。面積による評価(※)の利用に気付くのに，少しの時間を要してしまった。

§7. 小数第何位に初めて現れる0でない数と確率

最後に，任意に1つの自然数 n を選び 2^{-n} を小数表示したとき，小数第何位に初めて現れる0でない数が m (m は自然数，$1\leqq m\leqq 9$) である確率を考える。

2^{-n} の小数第 N 位に初めて0でない数 m が現れる

$\iff 10^{-N}\times m\leqq 2^{-n}<10^{-N}\times(m+1)$

$\iff N-\log_{10}(m+1)<n\log_{10}2\leqq N-\log_{10}m$

$\iff -\log_{10}(m+1)<\{n\log_{10}2\}\leqq-\log_{10}m$

よって，区間$(-1,\ 0]$の長さの中に区間$(-\log_{10}(m+1),\ -\log_{10}m]$の長さの占める割合を考えて，求める確率は

$$-\log_{10}m-(-\log_{10}(m+1))=\log_{10}\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

である。結局，求める確率は§3と同じという，言われてみれば当然の結果であることが分かった。

§8. いくつかの補足

[補足1]　本稿では2^nについて考えたが，10の累乗ではない自然数cについて$\log_{10}c$は無理数であるから，c^nについて考えても同じ確率が得られる。

[補足2]　WolframAlphaを用いてP_1，P_2，……，P_9と$P(1,\ 0)$，$P(1,\ 1)$，……，$P(1,\ 9)$の値を，小数第5位以下切り捨てで求めると次のようになる。ここで具体的な数値を求めたことで，§6の予想が得られた。改めて具体例の大切さを実感した。

		$P(1,\ 0)$	0.1196
P_1	0.3010	$P(1,\ 1)$	0.1138
P_2	0.1760	$P(1,\ 2)$	0.1088
P_3	0.1249	$P(1,\ 3)$	0.1043
P_4	0.0969	$P(1,\ 4)$	0.1003
P_5	0.0791	$P(1,\ 5)$	0.0966
P_6	0.0669	$P(1,\ 6)$	0.0933
P_7	0.0579	$P(1,\ 7)$	0.0903
P_8	0.0511	$P(1,\ 8)$	0.0875
P_9	0.0457	$P(1,\ 9)$	0.0849

[補足3]　最高位の次の位の数について扱った入試問題として，次のような例がある。

> 7^{70}の最高位の次の位の数字を求めよ。
>
> （2018　早稲田大，一部抜粋）

§9. おわりに

本稿では2^nの位に現れる数と確率について考え，2^nの最高位に1が現れる確率が$\log_{10}2$という無理数になることを見た。無理数が現れる確率としては，$\dfrac{1}{\pi}$が現れる**Buffonの針の問題**，$\dfrac{1}{e}$が現れる**完全順列に関する極限の問題**などが有名である。

πとeに比べると一般的な知名度は劣るが，重要な定数として

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}-\log n\right)$$

で定義される**Eulerの定数**　$\gamma=0.5772\cdots\cdots$　がある。γはおそらく無理数であると思うが，本稿の流れから次の疑問が浮かぶ。γとは全く関係ないと思われる事象や不自然ではない（あまり人工的ではない）事象から得られる確率の極限として，γが現れる例はどのようなものがあるのだろうか。

この疑問はしばらく頭の中で寝かせておこうと思う。

《参考文献》

〔1〕　根上生也　爽快！2^{100}三話　遊星社
〔2〕　青本和彦他　岩波数学入門辞典　岩波書店
〔3〕　WolframAlpha
https://ja.wolframalpha.com
〔4〕　2019年受験用　全国大学入試問題正解
④数学　（私立大編）　旺文社

（神奈川県立生田高等学校）