（等差）×（等比）型の数列の和について

久末（ひさすえ）　正樹（まさき）

§1. はじめに

数学Ｂの数列の単元で出てくる

$S=\sum_{k=1}^{n}(ak+b)r^{k-1}$ の形の和の式は，$\{ak+b\}$ は等差数列であり，$\{r^{k-1}\}$ は等比数列であることから，『**(等差)×(等比)型**』の数列の和といわれることがある。教科書では，この和を求めるには両辺に等比数列の公比 r を掛けて１項分だけ右にずらして書き並べ，引き算をすることで等比数列の和に帰着させる方法で求めている。

この論考では $S-rS$ の式を利用する以外の方法を紹介する。

§2. 様々な解法

以下，必要に応じて $x_n=an+b$ とする（n は整数）。

(解法１)微分を利用

$1+r+r^2+\cdots\cdots+r^n=\dfrac{r^{n+1}-1}{r-1}$ の両辺を r で微分することにより，

$$\sum_{k=1}^{n}kr^{k-1}=\frac{nr^{n+1}-(n+1)r^n+1}{(r-1)^2}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}(ak+b)r^{k-1}\\&=a\cdot\frac{nr^{n+1}-(n+1)r^n+1}{(r-1)^2}+b\cdot\frac{r^n-1}{r-1}\\&=\frac{(an+b)r^{n+1}-(an+a+b)r^n-br+(a+b)}{(r-1)^2}\\&=\frac{x_nr^{n+1}-x_{n+1}r^n-x_0r+x_1}{(r-1)^2}\end{aligned}$$

これは数学Ⅲを学んだ後であれば使えるようにしたい解法である。

(解法２)公比もどきをかける

$$S=x_1+x_2r+x_3r^2+\cdots\cdots+x_nr^{n-1}$$

の両辺に r^2 を掛けて２項右にずらして書き，辺々を加えると

$$\begin{array}{rl}S=&x_1+x_2r+x_3r^2+\cdots\cdots+x_nr^{n-1}\\ +)\,r^2S=&\qquad\qquad x_1r^2+\cdots\cdots+x_{n-1}r^n+x_nr^{n+1}\\ \hline (1+r^2)S=&x_1+x_2r+(x_3+x_1)r^2+\cdots\cdots\\ &+(x_n+x_{n-2})r^{n-1}+x_{n-1}r^n+x_nr^{n+1}\end{array}$$

……(※)

この式から $2rS$ を１項右にずらして書き，(※)から引き算すると

$$\begin{array}{rl}(1+r^2)S=&x_1+x_2r+(x_3+x_1)r^2+\cdots\cdots\\ &+(x_n+x_{n-2})r^{n-1}+x_{n-1}r^n+x_nr^{n+1}\\ -)\quad 2rS=&\qquad 2x_1r+\cdots\cdots+2x_{n-1}r^{n-1}+2x_nr^n\\ \hline (1+r^2-2r)S=&x_1+(x_2-2x_1)r+(x_3+x_1-2x_2)r^2\\ &+(x_4+x_2-2x_3)r^3+\cdots\cdots\\ &+(x_n+x_{n-2}-2x_{n-1})r^{n-1}\\ &+(x_{n-1}-2x_n)r^n+x_nr^{n+1}\end{array}$$

ここで，等差中項の性質により，$k=0$，1，2，……，n に対して $x_{k+1}+x_{k-1}-2x_k=0$ が成り立つから

$$(1+r^2-2r)S=x_1-x_0r-x_{n+1}r^n+x_nr^{n+1}$$

よって　　$S=\dfrac{x_nr^{n+1}-x_{n+1}r^n-x_0r+x_1}{(r-1)^2}$

(解法３)差分の和を利用

$r^k-r^{k-1}=(r-1)r^{k-1}$ であることを利用すると

$r^{k-1}=\dfrac{r^k-r^{k-1}}{r-1}$ が成り立つ。

ゆえに

$$\begin{aligned}x_kr^{k-1}&=\frac{x_k(r^k-r^{k-1})}{r-1}=\frac{x^kr^k-(x_{k-1}+a)r^{k-1}}{r-1}\\&=\frac{x_kr^k-x_{k-1}r^{k-1}}{r-1}-\frac{a}{r-1}r^{k-1}\end{aligned}$$

と変形できる。

よって，$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ に対して

$f(k)=\dfrac{x_k r^k}{r-1}$ とおくと

$$
\begin{aligned}
S&=\sum_{k=1}^{n}\{f(k)-f(k-1)\}-\frac{a}{r-1}\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}\\
&=\{f(1)-f(0)\}+\{f(2)-f(1)\}+\cdots\cdots\\
&\quad+\{f(n)-f(n-1)\}-\frac{a}{r-1}\sum_{k=1}^{n}r^{k-1}\\
&=f(n)-f(0)-\frac{a(r^n-1)}{(r-1)^2}\\
&=\frac{an+b}{r-1}r^n-\frac{b}{r-1}-\frac{a(r^n-1)}{(r-1)^2}\\
&=\frac{(an+b)r^{n+1}-(an+a+b)r^n-br+(a+b)}{(r-1)^2}\\
&=\frac{x_n r^{n+1}-x_{n+1}r^n-x_0 r+x_1}{(r-1)^2}
\end{aligned}
$$

行列式を利用すると

$$
S=\frac{1}{(r-1)^2}\left\{\begin{vmatrix}x_n & x_{n+1}\\ r^n & r^{n+1}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_0 & x_1\\ r^0 & r^1\end{vmatrix}\right\}
$$

となり，規則性が見やすい式になっている。

例１：$S=1\cdot1+3\cdot2+5\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}$

この場合 $x_k=2k-1,\ r=2$ であるから

$$
\begin{aligned}
S&=(2n-1)\cdot2^{n+1}-(2n+1)\cdot2^n-(-2)+1\\
&=(2n-3)\cdot2^n+3
\end{aligned}
$$

例２：$1\cdot1+2\cdot\dfrac{1}{3}+3\cdot\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+n\cdot\dfrac{1}{3^{n-1}}$

この場合 $x_k=k,\ r=\dfrac{1}{3}$ であるから

$$
\begin{aligned}
S&=\left(\frac{1}{3}-1\right)^{-2}\left\{\left(n\cdot\frac{1}{3^{n+1}}-(n+1)\cdot\frac{1}{3^n}\right)+1\right\}\\
&=\frac{9}{4}\left(1-\frac{2n+3}{3^{n+1}}\right)
\end{aligned}
$$

§3. （２次式)×(等比)の和

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2r^{k-1}$ の和も同様に差分を調べることにより求めることができる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}k^2r^{k-1}&=\frac{1}{r-1}\sum_{k=1}^{n}k^2(r^k-r^{k-1})\\
&=\frac{1}{r-1}\sum_{k=1}^{n}\{(k^2r^k-(k-1)^2r^{k-1})-(2k-1)r^{k-1}\}\\
&=\frac{1}{r-1}\left\{n^2r^n-\sum_{k=1}^{n}(2k-1)r^{k-1}\right\}
\end{aligned}
$$

となるので，§2 の結果を利用できる。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}k^2r^{k-1}\\
&=\frac{1}{r-1}\left\{n^2r^n-\frac{(2n-1)r^{n+1}-(2n+1)r^n+r+1}{(r-1)^2}\right\}
\end{aligned}
$$

例：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot2^{k-1}$

$$
\begin{aligned}
&=n^2\cdot2^n-\{(2n-1)2^{n+1}-(2n+1)2^n+2+1\}\\
&=(n^2-2n+3)2^n-3
\end{aligned}
$$

（北海道　札幌国際情報高等学校）