線対称である点の座標のいろいろな求め方
～多様な視点から考える～

西元(にしもと)　教善(のりよし)

§1. はじめに

線対称である点の座標については，数学Ⅱの「図形と方程式」の「２直線の関係」で扱う。例えば，次のような問題である。

> **問題**　直線 ℓ：$2x-y-3=0$ に関して，点 A(1，4) と対称な点Bの座標を求めよ。
> (〔１〕p.75 応用例題２)

その解法は，点Bの座標を $(p,\ q)$ として，①直線 ℓ と線対称な２点を結ぶ直線が垂直であること，②線対称な２点を結ぶ線分の中点が直線上にあることを利用して，p と q の連立１次方程式を作って解くことで求めるものである。

「点と直線」の中の内容として，２直線の垂直条件，線分の中点の座標を使うのである。別にこれを使わなければ解けないわけではない。他にも違った視点で求めることができる。

生徒には，この問題はこのようなやり方で解くというステレオタイプで着実に問題解決力を向上させるのもよいが，多様な発想で解くことも身につけさせたい。

§2. 点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に垂直な直線 $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$ の利用

§1. はじめにで言及した**問題**について，点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に垂直な直線の方程式が $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$ であること(〔１〕では脚注で扱っている。)を利用して解いてみる。

【解】　点 A(1，4) を通り，

直線 ℓ：$2x-y-3=0$ ……① に垂直な直線 ℓ' の方程式は

$$-(x-1)-2(y-4)=0$$

すなわち　$x+2y-9=0$　……②

①×2＋②より $5x-15=0$　よって　$x=3$

①に代入して $2\cdot3-y-3=0$　よって　$y=3$

したがって，ℓ と ℓ' の交点 M の座標は (3，3)

B$(p,\ q)$ とすると，線分 AB の中点が M であることから $\dfrac{1+p}{2}=3$，$\dfrac{4+q}{2}=3$　よって　$p=5$，$q=2$

したがって，B の座標は (5，2)

§3. 垂直二等分線の利用

図形的な考察をすると「**２点 A，B が直線 ℓ に関して対称**」ということは「**線分 AB の垂直二等分線が直線 ℓ**」ということでありそれは「**直線 ℓ 上の任意の点 P に対して AP＝BP**」ということである。

そこで P$(x,\ y)$，B$(p,\ q)$ とすると $AP^2=BP^2$ より

$(x-1)^2+(y-4)^2=(x-p)^2+(y-q)^2$　つまり

$x^2-2x+1+y^2-8y+16$

$=x^2-2px+p^2+y^2-2qy+q^2$

整理して　$(2p-2)x+(2q-8)y-p^2-q^2+17=0$

これが ℓ：$2x-y-3=0$ に一致するから

$(2p-2):(2q-8):(-p^2-q^2+17)$

$=2:(-1):(-3)$

$(2p-2):(2q-8)=2:(-1)$ より

$(p-1):(q-4)=2:(-1)$ であるから

$-(p-1)=2(q-4)$　よって　$p=-2q+9$　……①

$(2q-8):(-p^2-q^2+17)=(-1):(-3)$ より

$(2q-8):(-p^2-q^2+17)=1:3$ であるから

$3(2q-8)=-p^2-q^2+17$

すなわち　$p^2+q^2+6q-41=0$　……②

①を②に代入して

$(-2q+9)^2+q^2+6q-41=0$

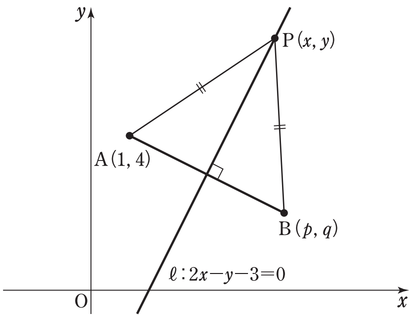
$5q^2-30q+40=0$　すなわち　$q^2-6q+8=0$

$(q-2)(q-4)=0$　よって　$q=2,\ 4$

①に代入して　$(p,\ q)=(5,\ 2),\ (1,\ 4)$

A(1, 4) は直線 ℓ 上にない（$\because$ $2\cdot1-4-3\neq0$）ので，点 B と異なる。よって，点 B の座標は　(5, 2)

線分 AB の垂直二等分線が ℓ



§4. 法線ベクトルの利用

A から直線 $\ell:2x-y-3=0$ に下ろした垂線と直線 ℓ の交点を H$(a,\ b)$ とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(a-1,\ b-4)$ であり，直線 ℓ の法線ベクトル $\vec{n}$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}/\!/\vec{n}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=t\vec{n}$（$t$ は実数）と表せる。

$\vec{n}=(2,\ -1)$ であるから

$$(a-1,\ b-4)=(2t,\ -t)$$

すなわち　$a=2t+1,\ b=-t+4$

H$(a,\ b)$ は ℓ 上にあるから　$2a-b-3=0$

よって　$2(2t+1)-(-t+4)-3=0$

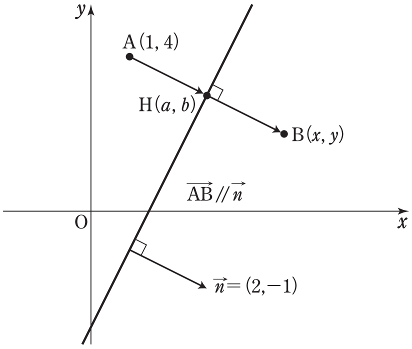
すなわち　$5t-5=0$　よって　$t=1$

したがって　$a=2\cdot1+1=3,\ b=-1+4=3$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{HB}}$ より $(3-1,\ 3-4)=(p-3,\ q-3)$

つまり　$p=5,\ q=2$

したがって，B の座標は　(5, 2)



§5. 正領域，負領域，法線ベクトル，点と直線の距離の活用

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(p-1,\ q-4)$ は直線 $\ell:2x-y-3=0$ の法線ベクトルであるから，

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=t(2,\ -1)$（$t$ は実数）と表せる。

よって　$(p-1,\ q-4)=(2t,\ -t)$

したがって　$p=2t+1,\ q=-t+4$　……①

ここで，$f(x,\ y)=2x-y-3$ とおく。

[1]　①より

$f(p,\ q)=f(2t+1,\ -t+4)$

$\qquad=2(2t+1)-(-t+4)-3=5t-5$　……①

$f(1,\ 4)=2\cdot1-4-3=-5<0$

よって，A(1, 4) は $f(x,\ y)$ の負領域にある。

点 A，B は ℓ に関して反対側にあるので，

B$(p,\ q)$ は $f(x,\ y)$ の正領域になければならない。

すなわち　$f(p,\ q)>0$　……②

①，②より　$5t-5>0$ であるから　$t>1$　……③

このとき，$\mathrm{AB}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(2t)^2+(-t)^2}=\sqrt{5}\,|t|$

点 A(1, 4) と直線 $\ell:2x-y-3=0$ 距離 d は

$$d=\frac{|2\cdot1-4-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$\mathrm{AB}=2d$ より $\sqrt{5}\,|t|=2\sqrt{5}$　よって　$|t|=2$

すなわち　$t=\pm2$

③より $t=2$ を ① に代入して　$p=5,\ q=2$

したがって，B の座標は　(5, 2)

[2]　①より，線分 AB の中点 M の座標は

$$\left(\frac{(2t+1)+1}{2},\ \frac{(-t+4)+4}{2}\right)$$

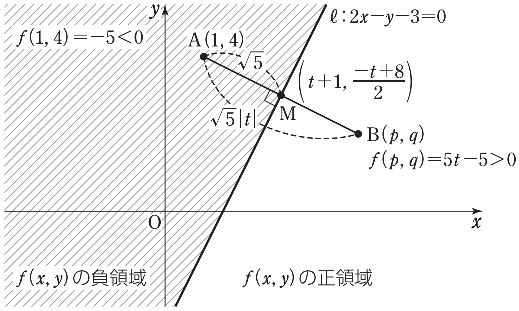
すなわち　$\left(t+1,\ \dfrac{-t+8}{2}\right)$

M は直線 $\ell:2x-y-3=0$ 上にあるから

$2(t+1)-\dfrac{-t+8}{2}-3=0$　すなわち　$\dfrac{5t}{2}-5=0$

よって　$t=2$ を ① に代入して　$p=5,\ q=2$

したがって，B の座標は　(5, 2)



§6. まとめ

点Aと直線ℓに関して対称な点Bの座標を求める問題について，教科書に載せてある代表的な（その文脈に応じた）解法以外の解法として次の(i)～(iv)の4つを考察してみた。

(i) $\vec{u}=(a,\ b)$ と $\vec{n}=(b,\ -a)$ が垂直であることから点$(x_1,\ y_1)$を通り，直線 $\ell：ax+by+c=0$ に垂直な直線ℓ'の方程式が $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$ であることからℓとℓ'の交点Mを求め，線分ABの中点がMになることからBの座標を求める解法

(ii) 線分ABの垂直二等分線がℓであることからBの座標を求める解法

(iii) Aからℓに下ろした垂線と直線ℓの交点をH, ℓの法線ベクトルを$\vec{n}$とすると $\overrightarrow{AH}/\!/\vec{n}$ であることから $\overrightarrow{AH}=t\vec{n}$ としてHの座標をtで表し，Hがℓ上にあることからtの値を求め，$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{HB}$ からBの座標を求める解法

(iv) $\overrightarrow{AB}/\!/\vec{n}$ であることから $\overrightarrow{AB}=t\vec{n}$ としてBの座標をtで表し，tの値を求め，Bの座標を求める解法　その際，正領域・負領域でtの符号を調べ，点と直線の距離を使ってtの値を求める方法と線分ABの中点Mがℓ上にあることからtの値を求める方法の2通りで求めた。

教科書では，「点と直線」「2直線の関係」に即して「座標平面上の2点を結ぶ線分の中点の座標」「2直線の垂直条件」を使って解いてあるが，そのような制約を取り払い多様な発想で解くとどのような解法があるか生徒に考えさせることにも数学教育的な意義があると考え，このような考察を行ってみた。

《参考文献》

〔1〕 数研出版　改訂版　高等学校　数学Ⅱ
p.75

（山口県立徳山高等学校）