倍数判定法と余りについて

竹内　憲治

§1. はじめに

授業中「倍数判定法はどうしてこんなに種類があって覚えにくいんですか？」という質問を受けた。

確かに，4 の倍数であれば「下 2 桁が 4 の倍数」，11 の倍数であれば「一の位から見て (奇数桁目の数の和)−(偶数桁目の数の和) が 11 の倍数」といった具合で，じゃあ 34 の倍数だったらどうなるの？といった疑問も出てくる。

そこで，自然数 n に対して「**n の倍数判定法**」を次の 2 つの視点から構成したい。

視点 1	「n の倍数判定法」は暗記しやすい，または，運用しやすいものであること。
視点 2	「n の倍数判定法」は n の倍数か否かを調べるだけではなく，n の倍数でなかった場合には，n で割ったときの余りが求められること。

§2. n の倍数判定法

任意の自然数 n について倍数判定を行い，かつ，n で割ったときの余りを求める方法を考える。もちろんそのような方法があれば，余りが 0 になるときが「**n の倍数判定法**」になっている。

まず，$n=7$ を例に考えよう。10 の累乗を 7 を法として考えると

$10^1\equiv10\equiv3 \pmod 7$

$10^2\equiv3^2\equiv9\equiv2 \pmod 7$

$10^3\equiv10^2\cdot10^1\equiv2\cdot3\equiv6\equiv-1 \pmod 7$

$10^4\equiv10^3\cdot10^1\equiv-1\cdot3\equiv-3 \pmod 7$

$10^5\equiv10^4\cdot10^1\equiv-3\cdot3\equiv-9\equiv-2 \pmod 7$

$10^6\equiv10^5\cdot10^1\equiv-2\cdot3\equiv-6\equiv1 \pmod 7$

$10^7\equiv10^6\cdot10^1\equiv1\cdot3\equiv3 \pmod 7$

……

となる。右辺は絶対値が最小になるように選んだ。10^7 以降はそれまでの繰り返しで，それはフェルマーの小定理からも分かる。

任意の自然数 N の，一の位，十の位，百の位，…… の数をそれぞれ a_0，a_1，a_2，……… として，N を

$$N=a_0+10a_1+10^2a_2+\cdots\cdots \quad (0\leqq a_i<10)$$

で表す。この N を 7 を法として考えると

まず，$10^1\equiv3 \pmod 7$ から

$$\begin{aligned}N&=a_0+10a_1+10^2a_2+10^3a_3+\cdots\cdots\\&\equiv a_0+3a_1+3^2a_2+3^3a_3+\cdots\cdots \pmod 7\end{aligned} \quad \cdots\cdots①$$

次に，$10^2\equiv2 \pmod 7$ から

$$\begin{aligned}N&=(a_0+10a_1)+10^2(a_2+10a_3)\\&\qquad+10^4(a_4+10a_5)+\cdots\cdots\\&\equiv(a_0+10a_1)+2(a_2+10a_3)\\&\qquad+2^2(a_4+10a_5)+\cdots\cdots \pmod 7\end{aligned} \quad \cdots\cdots②$$

更に，$10^3\equiv-1 \pmod 7$ から

$$\begin{aligned}N&=(a_0+10a_1+10^2a_2)+10^3(a_3+10a_4+10^2a_5)\\&\qquad+10^6(a_6+10a_7+10^2a_8)+\cdots\cdots\\&\equiv(a_0+10a_1+10^2a_2)+(-1)\cdot(a_3+10a_4+10^2a_5)\\&\qquad+(-1)^2\cdot(a_6+10a_7+10^2a_8)+\cdots\cdots \pmod 7\end{aligned} \quad \cdots\cdots③$$

のように表現できる。

このことから，N を 7 で割ったときの余りは

①より「**一の位から 1 桁毎に区切り，順に 1，3，3^2，3^3，… 倍した数の和を 7 で割った余り**」に等しい。

②より「**一の位から 2 桁毎に区切り，順に 1，2，2^2，2^3，… 倍した数の和を 7 で割った余り**」に等しい。

③より「**一の位から 3 桁毎に区切り，順に 1，−1，$(-1)^2$，$(-1)^3$，…… 倍した数の和を 7 で割った余り**」に等しい。

特に，③が簡明であり，これは古くからある 7 の倍数判定法「一の位から 3 桁毎に区切り，一の位から見て (奇数番目の数の和)−(偶数番目の数の和) が 7 の倍数」に他ならない。

なお，$10^6 \equiv 1 \pmod 7$ から N を「一の位から 6 桁ごとに区切り，順に 1 倍した数の和が 7 の倍数」すなわち「一の位から 6 桁ごとに区切った数の和が 7 の倍数」としてもよいが，実用性を考えると区切るのは 5 桁ぐらいまで，乗ずる倍率は 0，±1，…，±5 倍ぐらいまでであろう。また

$10^1 \equiv 3 \Leftrightarrow$ 1 桁毎に区切り，1，3，3^2，…… 倍

$10^2 \equiv 2 \Leftrightarrow$ 2 桁毎に区切り，1，2，2^2，…… 倍

$10^3 \equiv -1 \Leftrightarrow$ 3 桁毎に区切り，1，-1，$(-1)^2$，…… 倍

……

から，一般に

> **「n の倍数判定法」**
>
> (イ) $10^{○} \equiv △ \pmod n$ を満たす組 (○，△) を見つける。
>
> (ロ) N を一の位から ○ 桁毎に区切り，順に 1，△，$△^2$，…… 倍した数の和が n の倍数であれば，N は n の倍数である。

であることが分かる。

更に，このことから教科書にある倍数判定法を導くことができる。(つまり，教科書の倍数判定法は，倍数でなかった場合には余りが求められるように作られている。) 例えば

・「3 の倍数」…… $10^1 \equiv 1 \pmod 3$ より

⇔「一の位から 1 桁毎に区切り，
1，1，1，…… 倍した数の和が 3 の倍数」

⇔「各位の数の和が 3 の倍数」

・「4 の倍数」…… $10^2 \equiv 0 \pmod 4$ より

⇔「一の位から 2 桁毎に区切り，
1，0，0，…… 倍した数の和が 4 の倍数」

⇔「下 2 桁が 4 の倍数」

・「11 の倍数」…… $10^1 \equiv -1 \pmod{11}$ より

⇔「一の位から 1 桁毎に区切り，
1，-1，1，…… 倍した数の和が 11 の倍数」

⇔「一の位から見て (奇数桁目の数の和)－(偶数桁目の数の和) が 11 の倍数」

・「13 の倍数」…… $10^3 \equiv -1 \pmod{13}$ より

⇔「一の位から 3 桁毎に区切り，
1，-1，1，…… 倍した数の和が 13 の倍数」

⇔「一の位から 3 桁毎に区切り，一の位から見て (奇数番目の数の和)－(偶数番目の数の和) が 13 の倍数」といった具合である。

§3. まとめ

$10^{○} \equiv △ \pmod n$ を満たす組 (○，△) を具体的に見てみよう。§2 でも書いたが，区切り ○ は $1 \leqq ○ \leqq 5$ ぐらいまで，乗ずる倍率 △ は $-5 \leqq △ \leqq 5$ ぐらいまでとしたい。

	n の倍数	区切り	倍率
	mod n	○	△
	2	1	0
	3	1	1
	4	2	0
	5	1	0
	6	1	−2
	7	3	−1
	8	3	0
	9	1	1
	10	1	0
	11	1	−1
	12	1	−2
	13	3	−1
	14	2	2
	15	1	−5
	16	4	0
	17	2	−2
難	18	1	10
	19	2	5
	20	2	0
	21	2	−5
難	22	1	10
	23	4	−5
	24	2	4
	25	2	0
	26	2	−4
	27	3	1
	28	4	4
	29	4	−5
難	30	1	10
難	31	2	7
	32	5	0
	33	2	1
	34	2	−2
	35	2	−5
難	36	2	−8
	37	3	1
難	38	4	6
	39	5	4

表は $n=2, 3, \cdots\cdots, 39$ の各nについて
$10^{○}\equiv△\ (\mathrm{mod}\ n)$ を満たす組(○，△)のうち，なるべく $1\leqq○\leqq5$，$-5\leqq△\leqq5$ であり，かつ，簡単なものを選んだ。網掛けはその範囲に収まらなかったものである。(網掛けを含む行に「難」印)

特に，mod 18，mod 22，mod 30 などは
(○，△)＝(1，10) で，これは普通に割り算することと同意であるが，実際に(○，△)を探すときは，例えば mod 22 の場合には

$$10^1\equiv10\quad(\mathrm{mod}\ 22)$$
$$10^2=100\equiv-10\quad(\mathrm{mod}\ 22)$$
$$10^3\equiv-100\equiv10\quad(\mathrm{mod}\ 22)$$
$$\cdots\cdots$$

から
「一の位から2桁毎に区切り，1，−10，100，……倍(ry」
「一の位から3桁毎に区切り，1，10，100，……倍(ry」などとすれば一応，倍数判定法と言えそうだ。

また，冒頭に書いた「34の倍数判定法」は表から「一の位から2桁毎に区切り，1，−2，$(-2)^2$，$(-2)^3$，……倍した数の和が34の倍数」であることが分かる。

例えば，3141592 だと

$$\begin{array}{cccc} -8 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & |14| & 15 & |92 \end{array} = -24+56-30+92$$
$$=94$$
$$\equiv26\quad(\mathrm{mod}\ 34)$$

よって，3141592 を 34 で割ったときの余りは 26 である。

§4. おわりに

$10^{○}\equiv△\ (\mathrm{mod}\ n)$ を満たす組(○，△)の選び方は複数存在する。適当な自然数nについて生徒自身が即席の倍数判定法を作り，クラスで比較・検討などをすると数学の「面白さ・美しさ・実用性」を実感できるかもしれない。

《参考文献》
〔1〕 教科書　数学A，数研出版(2022)
〔2〕 チャート研究所(編著)：増補改訂版
チャート式　基礎からの数学　I＋A，
数研出版(2020)

(鳥取県立鳥取湖陵高等学校)