回転する正多角形

松田　康雄（まつだ　やすお）

§1. はじめに

本稿は，正多角形を，辺の片方の延長線が元の正多角形の頂点を通るように回転縮小しながら中心に収束する（以下「**回転する**」と呼ぶ）正多角形に関する問題を考える。きっかけは和算書「拾璣算法（しゅきさんぽう）」に載っていた次の問題である。（〔2〕）

問題1． 正五角形の1辺の長さが5のとき，矢の長さの最大値を求めよ。

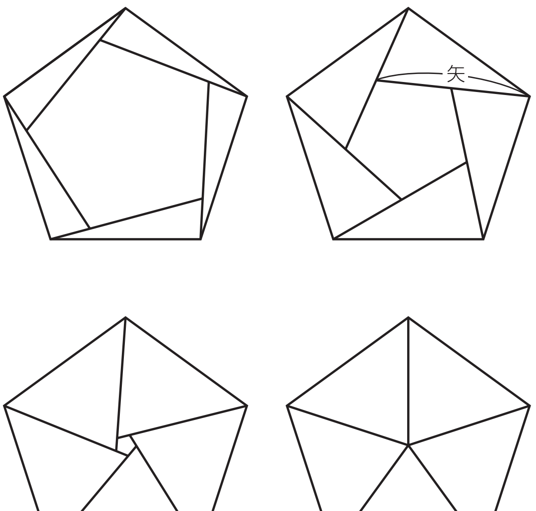

図1　回転する正五角形

§2. 回転する正多角形の定理

半径1の円に内接する正 $n(\geqq 3)$ 角形を考え，隣り合う2つの頂点をA，Bとする。正 n 角形の中心Oのまわりに $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{n}\right)$ 回転し，点A，Bがそれぞれ点A′，B′に，3点A′，B′，Bが一直線上にあるように，移ったとする。この正 n 角形の外接円の半径を r とすると次の定理が成り立つ。

定理. $r=\dfrac{\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{n}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{n}}$，$\mathrm{A'B}=\dfrac{\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{n}\right)}{\cos\dfrac{\pi}{n}}$，

点A′の軌跡は△AOBの外接円の（小さい方の）弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AO}}$ である。

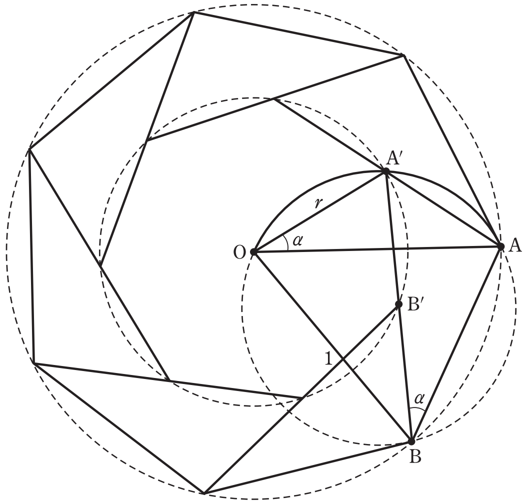

図2　回転する正多角形

証明. 角度 α の回転より，半径OA′と半径OAのなす角度も，辺A′B′と辺ABのなす角度も α であるから

$$\angle\mathrm{AOA'}=\angle\mathrm{ABA'}=\alpha$$

となり点A′は△AOBの外接円の周上にある。点A′は角度 α の回転によって円弧 $\overset{\frown}{\mathrm{AO}}$ を動くので定理の後半が証明される。

△AOBは

$$\angle\mathrm{AOB}=\frac{2\pi}{n},\quad \angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{OBA}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$$

の二等辺三角形である。△OBA′において

$$\angle\mathrm{A'OB}=\angle\mathrm{A'OA}+\angle\mathrm{AOB}=\alpha+\frac{2\pi}{n},$$

$$\angle\mathrm{OBA'}=\angle\mathrm{OBA}-\angle\mathrm{ABA'}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}-\alpha,$$

$$\angle\mathrm{OA'B}=\angle\mathrm{OAB}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}$$ である。

正弦定理から

$$\frac{\mathrm{A'B}}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)}=\frac{\mathrm{OA'}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}-\alpha\right)}=\frac{\mathrm{OB}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}\right)},$$

$$\frac{\mathrm{A'B}}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}+\alpha\right)}=\frac{r}{\cos\left(\frac{\pi}{n}+\alpha\right)}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}}$$

となって定理の等式が証明される。 終

§3. 問題 1 の解答

定理を用いて**問題 1** を解答する。

【解答】 半径 1 の円に内接する正五角形は，1 辺の長さが $2\sin\frac{\pi}{5}$ で，定理から矢の長さは

$$\mathrm{A'B}=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{5}\right)}{\cos\frac{\pi}{5}}\quad\left(0<\alpha<\frac{3\pi}{10}\right)$$ である。

矢の長さは，$\alpha=\frac{\pi}{10}$ のとき最大値

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{5}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{5}}$$ をとる([注 1])。したがって，

正五角形の 1 辺の長さが 5 のとき，矢の長さの最大値は

$$\frac{5}{2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}}=\frac{5}{\sin\frac{2\pi}{5}}=\frac{20}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$=\sqrt{50-10\sqrt{5}}=5.2573111\cdots\cdots$$

である([注 2])。

§4. 問題を作る

定理の応用として次の問題を考えた。

> **問題 2．** 正六角形を 15° 回転したとき，中の正六角形の面積は元の正六角形の面積の何倍か。

> **問題 3．**(〔1〕改題)図 4 のように正方形の中に正方形がある。5 個の円の半径が等しいとき，2 つの正方形の辺の長さの比を求めよ。

> **問題 4．**(〔3〕)図 5 のような正三角形において
> $$a=\sqrt{b^2+3bc+3c^2}$$
> を証明せよ。

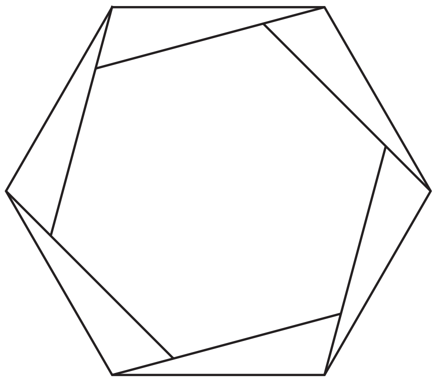

図 3　回転する正六角形

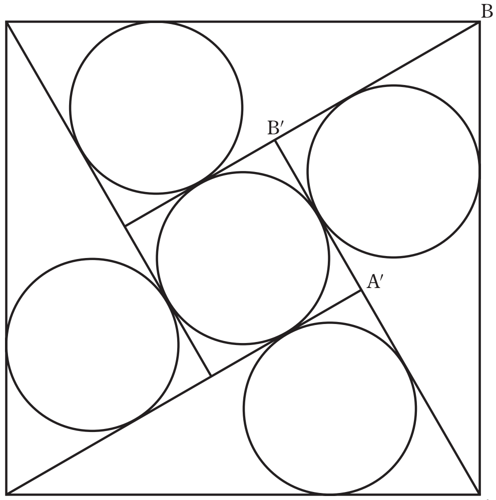

図 4　回転する正方形の中の円

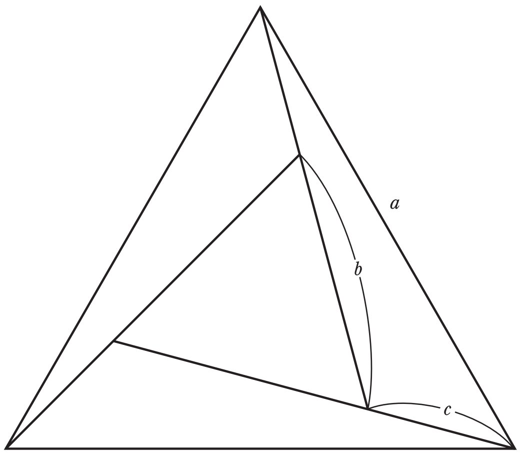

図 5　回転する正三角形

§5. 問題の解答

定理を用いて問題を解答する。

【問題2の解答】 定理で $n=6$，$\alpha=\frac{\pi}{12}$ とすると，

$r=\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ となるので，面積は元の正六角形の面積の $\frac{2}{3}$ 倍になる。 終

【問題3の解答】 外接円の半径1の正方形（1辺の長さは $\sqrt{2}$）を $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$ 回転した正方形の内接円の半径は

$$\frac{r}{\sqrt{2}}=\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}}=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) \quad \cdots\cdots ①$$

となる。

一方，$\triangle ABB'$ は $\angle AB'B=90^\circ$，$\angle BAB'=\alpha$，$AB=\sqrt{2}$ の直角三角形であるから

$$AB'=\sqrt{2}\cos\alpha,\ BB'=\sqrt{2}\sin\alpha$$

よって，その内接円の半径は

$$\frac{1}{2}(\sqrt{2}\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha-\sqrt{2})$$
$$=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cdots\cdots ②$$

となる。①と②が一致するので

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$-2\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\alpha=\frac{1}{2}$$

より，$\alpha=\frac{\pi}{6}$ である。

したがって，求める比は

$$1:r=1:\sqrt{2}\cos\frac{5}{12}\pi=2:(\sqrt{3}-1)$$

である。 終

【問題4の略解】 外接円の半径を1として

$$a=\sqrt{3},$$
$$b=\sqrt{3}\,r=2\sqrt{3}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\sqrt{3}\cos\alpha-3\sin\alpha,$$
$$c=A'B-A'B'=2\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)-b$$
$$=2\sin\alpha$$

から示される。 終

§6. おわりに

動く図形の問題は難しいけれど興味深く感じる。回転したときの頂点の軌跡が，正多角形を分割した二等辺三角形の外接円の弧というのも不思議な感じがする。

「拾璣算法」は1769年に発行されたとされているが，今から250年以上前に**問題1**の答の正確な値が示されているのは驚きである。

注1． 矢である線分 A′B が △AOB の外接円の直径になるときである。

注2．〔2〕には答として次の値が書かれている。
5.25731112119133604025669 微強

《文献・参考資料》

〔1〕 深川英俊，ダン・ペドー，日本の幾何－何題解けますか？，森北出版，1994年，p.37。

〔2〕 藤井康生，米光丁，「拾璣算法」―現代解と解説―，1999年。

〔3〕 藤井康生，「算法天生法指南」（全五巻）問題の解説，大阪教育図書，1997年，9-10。

（長崎大学　教育学部　非常勤講師）