

連分数の世界へようこそ

～ \sqrt{n} の近似値, 黄金比, ユークリッドの互除法～

いまち ゆうき
伊町 悠希

§1. はじめに

$$\sqrt{2}=1.41421356\cdots \quad (\text{一夜一夜に人見頃})$$

$$\sqrt{3}=1.7320508\cdots \quad (\text{人並みにおごれや})$$

$$\sqrt{5}=2.2360679\cdots \quad (\text{富士山麓オウム鳴く})$$

$$\pi=3.14159265358979\cdots$$

などの \sqrt{n} の語呂合わせや π の近似値は有名だが、その近似値を具体的に調べられるだろうか。ここでは、無理数を分数で近似し、その近似値について確認する。

§2. 連分数展開

「連分数」とは、ある数を分数表記したときに、分母の中に更に分数が含まれる次のような形の分数のことを指す。

$$x = x_0 + \frac{1}{x_1 + \frac{1}{x_2 + \frac{1}{x_3}}}$$

また、ある数を連分数の形に変形することを**連分数展開**するという。この章では「連分数展開」の例を有理数と無理数の2パターンに分けて紹介する。

§2-1. 有理数の連分数展開

例 $\frac{37}{28} = 1 + \frac{9}{28} = 1 + \frac{1}{\frac{28}{9}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9}}$ [終]

例題1 例を参考にして $\frac{35}{19}$ を連分数展開せよ。

[解答] $\frac{35}{19} = 1 + \frac{16}{19} = 1 + \frac{1}{\frac{19}{16}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{16}}$
 $= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{16}{3}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5 + \frac{1}{3}}}$ [終]

§2-2. 無理数の連分数展開

§2-1のように計算をすることで、どんな有理数も連分数展開することができる。さらに、実数の範囲に拡張して連分数展開できるか考える。

初めに、黄金数 α 【§5参考】の連分数展開を紹介する。黄金数 $\alpha \left(= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ とは方程式 $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ を満たす正の数である。この式を次のように変形する。

$$\alpha^2 = \alpha + 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad (\alpha > 0)$$

ここで、①の右辺の分数 $\frac{1}{\alpha}$ における α も $1 + \frac{1}{\alpha}$ とおくことができるから

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow \alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さらに、②の右辺の分数 $\frac{1}{\alpha}$ における α も $1 + \frac{1}{\alpha}$ とおくことができるから

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow \alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}}}$$

のように変形される。以下同様にして、

$$\alpha = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \cdots}}}$$

のように連分数展開される。

次に、 $\sqrt{2}$ の連分数展開を紹介する。

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで、③の右辺の分数における $\sqrt{2}$ も $1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$ とおくことができるから

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

以下同様にして

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

のように連分数展開される。

この連分数展開から分かるように、 $\sqrt{2}$ は無理数である。このようにして、背理法を使わずに連分数展開によって、 $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明ができる。

以上2つの例のように計算することで、実数の範囲でどのような数でも連分数展開することができる。(証明略)

注意 一般に、有理数や無理数の定義からわかるように、連分数展開をしたときに、その値が有理数ならばこの作業は有限回数で終わるが、無理数ならばこの作業は無限回続くことになる。(証明略)

§3. \sqrt{n} の近似値

$\sqrt{2}$ の連分数展開は③式で与えられた。この③式から、 $a_1=1$ 、 $a_{n+1}=1+\frac{1}{1+a_n}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ をつくる時、連分数の計算から、この極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が $\sqrt{2}$ である。【収束性については§4参考】

この漸化式を用いて、 a_n を計算することで $\sqrt{2}$ の近似値が求められる。具体的には、次のように計算する。

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{1+1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{5} = 1.4$$

$$a_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{7}{5}} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{5}} = \frac{17}{12} = 1.41\dot{6}$$

$$a_5 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{17}{12}} = 1 + \frac{12}{29} = \frac{41}{29} = 1.413793103\cdots$$

$$a_6 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{41}{29}} = 1 + \frac{29}{70} = \frac{99}{70} = 1.414285714\cdots$$

$$a_7 = 1.414201183\cdots \quad a_8 = 1.414214586\cdots$$

$$a_9 = 1.414213198\cdots \quad a_{10} = 1.414213625\cdots$$

$$a_{11} = 1.414213552\cdots \quad a_{12} = 1.414213564\cdots$$

$$a_{13} = 1.414213562\cdots \quad a_{14} = 1.414213562\cdots$$

終

注意 手計算で連分数の計算を行うのは大変だが、関数電卓で、Ans=1と入力して、 $1 + \frac{1}{1 + \text{Ans}}$ を繰り返し求めることで、この計算も容易に行える。

例題2 $\frac{1}{1 + \sqrt{5}}$ を計算することで、 $\sqrt{5} \doteq 2.2360679$ となることを確認せよ。

【解答】

$$\frac{1}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \Leftrightarrow \frac{4}{1 + \sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5} = 1 + \frac{4}{1 + \sqrt{5}}$$

となる。自然数 n について、 $a_1=1$ 、

$a_{n+1}=1+\frac{4}{1+a_n}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の極限值

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が $\sqrt{5}$ となる。

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1 + \frac{4}{1+1} = 1 + \frac{4}{2} = 3$$

$$a_3 = 1 + \frac{4}{1+3} = 1 + \frac{4}{4} = 2$$

$$a_4 = 1 + \frac{4}{1+2} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} = 2.\dot{3}$$

$$a_5 = 1 + \frac{4}{1 + \frac{7}{3}} = 1 + \frac{12}{10} = \frac{11}{5} = 2.2$$

$$a_6 = 1 + \frac{4}{1 + \frac{11}{5}} = 1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$a_7 = 2.230769231\cdots \quad a_8 = 2.238095238\cdots$$

$$a_9 = 2.235293118\cdots \quad a_{10} = 2.363636363\cdots$$

$$a_{11} = 2.235955056\cdots \quad a_{12} = 2.236111111\cdots$$

$$a_{13} = 2.236051502\cdots \quad a_{14} = 2.236074271\cdots$$

$$a_{15} = 2.236065574\cdots \quad a_{16} = 2.236068896\cdots$$

$$a_{17} = 2.236067627\cdots \quad a_{18} = 2.236068811\cdots$$

$$a_{19} = 2.236067926\cdots \quad a_{20} = 2.236067997\cdots$$

終

注意 関数電卓で、Ans=1 と入力して、

$1 + \frac{4}{1 + \text{Ans}}$ を繰り返し求めることで、この計算も容易に行える。

最後に、 \sqrt{n} の近似値の計算を一般化したい。そこで、ここでは、 n を自然数とするときの \sqrt{n} の近似値の求め方について考察する。

$$\frac{1}{1 + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - 1}{n - 1} \Leftrightarrow \frac{n - 1}{1 + \sqrt{n}} = \sqrt{n} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{n} = 1 + \frac{n - 1}{1 + \sqrt{n}}$$

となる。自然数 n について、 $a_1 = 1$,

$a_{n+1} = 1 + \frac{n - 1}{1 + a_n}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ の極限值

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が \sqrt{n} となる。

関数電卓を利用して、Ans=1 と入力して、その後 $1 + \frac{n - 1}{1 + \text{Ans}}$ を繰り返し求めることで、 \sqrt{n} の近似値を求めることができる。

§4. 連分数展開の収束

§2, §3 で連分数展開を考えてきたが、例えば、 $\sqrt{2}$ の連分数展開 $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$ の収束性につ

いて言及する必要がある。そこで次の命題を考える。以下、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n}$$

を満たすものとする。また、 a_n を自然数 p_n, q_n を用いて、 $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ (既約分数の形) と表す。

命題 $|a_{n+1} - a_n| = \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$

証明 $\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{|q_n p_{n+1} - p_n q_{n+1}|}{q_n q_{n+1}}$ であるから、 $|q_n p_{n+1} - p_n q_{n+1}| = 1$ を示せばよい。

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1 + a_n} \text{ より } \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{p_n}{q_n}}$$

$$= \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n}$$

$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ は既約分数であるから

$$p_{n+1} = p_n + 2q_n, q_{n+1} = p_n + q_n$$

したがって

$$\begin{aligned} & |q_n p_{n+1} - p_n q_{n+1}| \\ &= |q_n(p_n + 2q_n) - p_n(p_n + q_n)| \\ &= |2q_n^2 - p_n^2| \\ &= |2(p_{n-1} + q_{n-1})^2 - (p_{n-1} + 2q_{n-1})^2| \\ &= |p_{n-1}^2 - 2q_{n-1}^2| \\ &= |p_{n-2}^2 - 2q_{n-2}^2| \\ &= \dots \\ &= |p_1^2 - 2q_1^2| \\ &= |1^2 - 2 \cdot 1^2| \\ &= 1 \end{aligned}$$

終

この命題を使うと

$$|\sqrt{2} - a_n| < |a_{n+1} - a_n| = \left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

となる。この式から、 a_n を分数表示したときの分母の2乗分の1より小さくなるので、かなりの精度で近似ができ、収束することが分かる。

この式から、例えば $|\sqrt{2} - a_3| < \frac{1}{q_3^2} = \frac{1}{25} < \frac{1}{10}$ を満たすので、 a_3 まで求めると、小数第1位まで近似できる。このように、 $|\sqrt{2} - a_n| < \frac{1}{q_n^2}$ という式を用いて無理数を有理数で近似する方法をディオファントス近似という。

参考 連分数や近似値関連の作問例

問1 $\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}$ が収束するとき、その収束値を求めよ。

[答 $-1 + \sqrt{3}$]

問2 円周率 π を連分数展開せよ。

$$\left[\text{答 } 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}} \right]$$

問3 [2017 大阪大学]

a, b を自然数とし、不等式

$$\left| \frac{a}{b} - \sqrt{7} \right| < \frac{2}{b^4} \quad \dots\dots (A)$$

を考える。次の問いに答えよ。ただし、 $2.645 < \sqrt{7} < 2.646$ であること、 $\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい。

(1) 不等式(A)を満たし $b \geq 2$ である自然数 a, b に対して

$$\left| \frac{a}{b} + \sqrt{7} \right| < 6$$

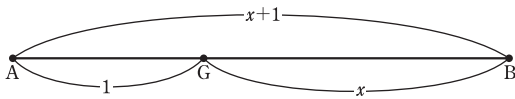
であることを示せ。 [答 略]

(2) 不等式(A)を満たす自然数 a, b の組のうち、 $b \geq 2$ であるものをすべて求めよ。

[答 $a=8, b=3$]

§5. 黄金比と白銀比

黄金比とは、 $1 : \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を満たす比のことで、世界で最も美しい比と言われている。幾何学的には、次のような線分 AB を、 $AG : GB = GB : AB$ が成立するように分割した $AG : GB$ の比を表している。



$$AG : GB = GB : AB \Leftrightarrow 1 : x = x : (x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (x > 0)$$

この黄金比における $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ の値を**黄金数**という。

この黄金数 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ を連分数展開 (§2-2 参考) すると

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

のように展開され、1 が限りなく続いている形となっている。この連分数展開の式から、黄金比の数の上でも美しいと言える。ちなみに、この黄金数は、フィボナッチ数列 $\{a_n\}$ における比の極限值

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ でもある。

$$\left(\text{証明略 } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \right)$$

から従う)

注意 フィボナッチ数列 $\{a_n\}$ とは、

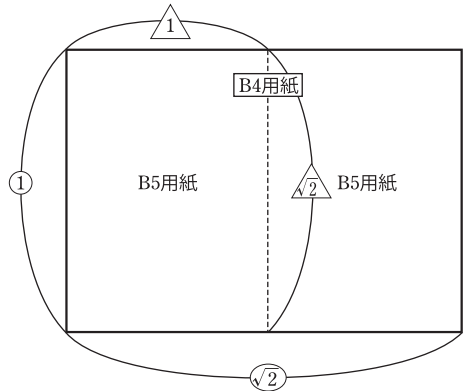
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

という漸化式を満たす数列のことである。

§2 で計算した $\sqrt{2}$ の連分数展開を振り返ると、

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

であった。これは、黄金数の分数における 1 を 2 に変えた形となっている。この形は黄金数に比べれば美しさに欠けるが、規則性のある綺麗な展開と言える。この値のことを白銀数といい、 $1 : \sqrt{2}$ の比を**白銀比**という。白銀比は、黄金比よりも利便性に富んでいて、紙の規格などにも採用されている。日常生活でよく見かける A4 用紙や B5 用紙などの紙は、短辺と長辺の比が $1 : \sqrt{2}$ の比になっている。また、このような紙を、短辺をくっつけるように半分に折ると、その紙も $1 : \sqrt{2}$ の白銀比の長方形となる。このことから、実用性に富んだ比だと言えるのではないか。



参考 黄金比関係の作問例

問4 $\sin 18^\circ, \cos 36^\circ$ を求めよ。

$$\left[\text{答 } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \right]$$

問5 1 辺の長さが 1 の正 5 角形の多角形 ABCDE について、次の問いに答えよ。

(1) $\angle CAD$ の大きさを求めよ。 [答 36°]

(2) 線分 AC の長さを求めよ。

$$\left[\text{答 } AC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$$

(3) \overrightarrow{BC} を \overrightarrow{AB} と \overrightarrow{AE} を用いて表せ。

$$\left[\text{答 } \overrightarrow{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \right]$$

問6 フィボナッチ数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ。

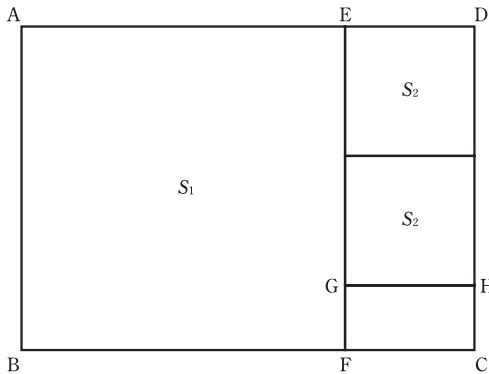
(1) a_n の一般項を求めよ。

$$\left[\text{答 } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\} \right]$$

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ を求めよ。 $\left[\text{答 } \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right]$

§6. ユークリッドの互除法

ここでは、まず §2-2 で計算した $\sqrt{2}$ の連分数展開の図形的な意味について考察する。そこで、図のように、 $AB=1$, $AD=\sqrt{2}$ となるような長方形 ABCD を考える。



この長方形を1辺の長さが1の正方形 S_1 と余った長方形 EDCF に分ける。次に、長方形 EDCF をさらに、1辺の長さが $\sqrt{2}-1$ の正方形 S_2 2つ分と余りの長方形 GFCH に分ける。このとき、

$$\left(\begin{array}{l} \text{(長方形 EDCF)} \oslash \text{(長方形 GFCH)} \\ CH = 1 - 2(\sqrt{2}-1) = 3 - 2\sqrt{2} \text{ であり、} \\ CH : CF = (3 - 2\sqrt{2}) : (\sqrt{2}-1) \\ = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} : 1 = (\sqrt{2}-1) : 1 \end{array} \right)$$

これは、長方形 EDCF を正方形 S_2 と長方形 GFCH に分けたときに元の長方形と同じ形の長方形が残ることを表している。この作業を繰り返し行うので、この作業は永遠に終わることがない。ここで、 n 回目の分割で出てくる長方形の短辺の長さを r_n とすると、 r_n は

$$r_0 = 1, \sqrt{2} = 1 + r_1, r_n = 2r_{n+1} + r_{n+2} \quad \dots \quad \textcircled{4}$$

を満たす。

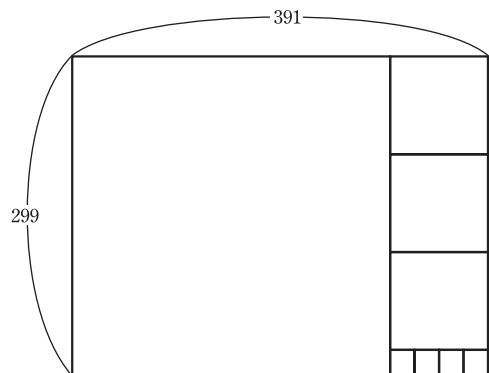
$$\textcircled{4} \Leftrightarrow \frac{r_n}{r_{n+1}} = 2 + \frac{r_{n+2}}{r_{n+1}} \quad \dots \quad \textcircled{5}$$

⑤式は、 $r_n : r_{n+1}$ の比の長方形を、辺の長さが r_{n+1} の正方形2つと $r_{n+2} : r_{n+1}$ の比の長方形に分けたことを表している。この④、⑤式を用いて、 $\sqrt{2}$ の連分数展開をすると、

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1 + r_1 = 1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{r_2}{r_1}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{r_3}{r_2}}} = \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \end{aligned}$$

のように計算できる。したがって、 $\sqrt{2}$ の連分数展開は、 $r_n : r_{n+1}$ の比の長方形を、辺の長さが r_{n+1} の正方形2つと $r_{n+2} : r_{n+1}$ の比の長方形に分け、これを永遠に繰り返す展開になっている。図形的にも、余りの長方形がでてしまうので、連分数が有限で終わることなく、無限に続くことが確認できた。

ところで、先の長方形 ABCD の図をどこかで見た覚えがないだろうか。これは、例えば、391 と 299 の最大公約数を求める際に、ユークリッドの互除法の原理の説明で見かける図である。(互除法は有理数に限られるが…)



この章で、学習したことを活用すると、391 と 299 の最大公約数は、 $\frac{391}{299}$ を連分数展開することでも計算できることが分かる。

$$\frac{391}{299} = 1 + \frac{92}{299} \quad \dots \quad \textcircled{6}$$

⑥式は、辺の比が 391 : 299 の長方形を、1辺の長さが 299 の正方形と辺の比が 92 : 299 の長方形に分け

たことを表している。

$$\textcircled{6} \Leftrightarrow \frac{391}{299} = 1 + \frac{1}{\frac{299}{92}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{23}{92}} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦式の最右辺の $3 + \frac{23}{92}$ は、辺の比が $299 : 92$ の長方形を1辺の長さが 92 の正方形3つと辺の比が $23 : 92$ の長方形に分けたことを表している。

$$\textcircled{7} \Leftrightarrow \frac{391}{299} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{23}{92}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{92}{23}}} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑧式の最右辺の $\frac{1}{4}$ は、辺の比が $92 : 23$ の長方形を、1辺の長さが 23 の正方形4つに分けたことを表している。以上より、 391 と 299 の最大公約数は 23 である。〔終〕

例題3 方程式 $31x + 22y = 1$ を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。

まず、 $\frac{31}{22}$ を連分数展開すると、

$$\begin{aligned} \frac{31}{22} &= 1 + \frac{9}{22} = 1 + \frac{1}{\frac{22}{9}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{4}{9}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} \\ &= 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\frac{31}{22}$ の連分数展開で $\frac{1}{4}$ の1つ前で

止めた式が $1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$ である

から、

$$\left| \frac{31}{22} - \frac{7}{5} \right| = \left| \frac{31 \times 5 - 7 \times 22}{22 \times 5} \right| = \frac{1}{22 \times 5}$$

この式から、 $31 \times 5 - 7 \times 22 = 1$ であることが分かる。すなわち、 $31x + 22y = 1$ を満たす整数は

$$x = 5, y = -7 \quad \text{〔終〕}$$

このように、連分数展開は、不定方程式の特殊解を求める際にも効力を発揮する。

注意 §4の命題では、 $\sqrt{2}$ の場合に

$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ が成立することを述べたが、一般的な連分数展開でも

$\left| \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$ が成立する。(証明略)

参考 ユークリッドの互除法の作問例

問7 9401 と 10349 の最大公約数を求めよ。

[答 79]

問8 $\frac{6667}{7021}$ を約分して既約分数で表せ。[答 $\frac{113}{119}$]

問9 方程式 $157x + 138y = 1$ を満たす整数 x, y の組を1つ求めよ。[答 $x = -29, y = 33$]

§7. 最後に

$\sqrt{2} = 1.41421356\dots$ であるという知識があっても、その値がどのようにして調べられたか知らない生徒が多い。無理数は生徒にとっては未知の数で、なかなか馴染めない数である。そこで、今回課題学習として、 \sqrt{n} の具体的な値を近似で調べる授業を実践した。本校は、工業高校で、電卓の扱いには慣れている生徒が多いため、電卓をうまく駆使することで、未知の数であった無理数が、計算で求められることに感動している生徒も多かった。

さらに、連分数展開と黄金比の関係性から、黄金比という言葉を知らなかった生徒も、数の上での美しさを理解したようである。さらに、ミロのヴィーナスなどの美術品などに触れると、より美しさ分かるのではないだろうか。

《参考文献》

- [1] 「改訂版 高等学校 数学 I p186, p187」数研出版
- [2] 「改訂版 高等学校 数学 A p118~p152, p157」数研出版
- [3] 「改訂版 精説 高校数学 第3巻 p37」数研出版
- [4] 「なかけんの数学ノート【発展】ユークリッドの互除法と連分数」【§6 参考】
<https://math.nakaken88.com/textbook/master-euclidean-algorithm-and-continued-fraction/>

(静岡県立掛川東高等学校)