なぜ t を消去してうまくいくのか
～実験を通じた解答の作成～

細木（ほそき）　翔太（しょうた）

§1. はじめに

私が高校生のときに理解に苦しんだ問題と解答が下に記載されている軌跡の問題である。

問題

t の値が変化するとき，次の 2 直線の交点Pの軌跡を求めよ。

$$y=t(x+2),\ ty=2-x$$

【解答】

$y=t(x+2)$ …… ①，　$ty=2-x$ …… ②

点Pの座標を $(x,\ y)$ とすると，$(x,\ y)$ は①，②を満たす。

[1]　$y\neq 0$ のとき，②から　$t=\dfrac{2-x}{y}$

これを①に代入して　$y=\dfrac{2-x}{y}(x+2)$

よって　$x^2+y^2=4$ …… ③

③で $y=0$ とすると　$x=\pm 2$

ゆえに，$y\neq 0$ のとき，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は円③から 2 点 $(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を除いた図形上にある。

[2]　$y=0$ のとき，②から　$x=2$

$x=2$，$y=0$ を①に代入すると　$t=0$

よって，点 $(2,\ 0)$ は，$t=0$ のときの 2 直線の交点である。

[1]，[2] から，点Pは円③から点 $(-2,\ 0)$ を除いた図形上にある。

逆に，この図形上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす。したがって，点Pの軌跡は，中心が原点，半径が 2 の円である。ただし，
点 $(-2,\ 0)$ を除く。

理解できている人にとっては何も問題のない素晴らしい解答であるが，高校生だったときの私は「なぜ t を消去してうまくいくのか」が腑に落ちなかった。私がこの問題を理解するまでに至った過程をブラッシュアップさせて次のような実験を通して生徒に指導を行ったので，今回はそれを紹介させていただきたい。

§2-1. 実験 1

$t=0$ のとき　①は $y=0$，②は $x=2$

よって　$\mathrm{P}(2,\ 0)$

$t=1$ のとき　①は $y=x+2$，②は $y=-x+2$

よって　$\mathrm{P}(0,\ 2)$

$t=-1$ のとき　①は $y=-x-2$，②は $y=x-2$

よって　$\mathrm{P}(0,\ -2)$

…………

この実験 1 を通じて次のことを確認させた。

1　t の値をいろいろ変えて交点Pをプロットしていくと，軌跡の形を予想することができる。

2　実験 1 をすべての実数 t に対して行えば軌跡を求められるが，現実的には不可能である。

3　この実験 1 は「t の値を決める」→「交点Pが決まる」の順番で展開されている。

§2-2. 実験 2

「実験 1 では埒があかないので発想を逆転させよう」と述べた後に次の例を考えさせた。

● 交点が $\mathrm{P}(1,\ 1)$ となるような t は存在するか？

点 $(1,\ 1)$ が①上にあるとき　$1=t(1+2)$

すなわち　$t=\dfrac{1}{3}$

点 $(1,\ 1)$ が②上にあるとき　$t\cdot 1=2-1$

すなわち　$t=1$

異なる t の値が出てきてしまった。(残念…)

つまり，点 $(1,\ 1)$ が交点となるような t は存在しない。

● 交点が$P(1,\sqrt{3})$となるようなtは存在するか？

点$(1,\sqrt{3})$が①上にあるとき　$\sqrt{3}=t(1+2)$

すなわち　$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

点$(1,\sqrt{3})$が②上にあるとき　$t\cdot\sqrt{3}=2-1$

すなわち　$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

同じtの値が出てきてくれた。(嬉しい！！)

つまり，点$(1,\sqrt{3})$が交点となるようなtは

$$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

この実験2を通して，次のことを確認させた。

1　実験2は実験1の発想を逆転させていて，「交点P(の候補)を決める」→「tの値が決まる(かどうかを調べる)」という順番で展開している。

2　交点の座標においては，「①に代入したときのtの値」と，「②に代入したときのtの値」が一致するかどうかがポイントである。

この実験2を骨子として解答を作成する。

§2-3. 実験2を踏まえた解答

交点の座標を代入して，$t=$○○ の形に直すときに

　　$x=-2$ だと①で $t=$○○ の形にできない

　　$y=0$ だと②で $t=$○○ の形にできない

ので場合分けをしないといけないことを確認してから次の解答を作成した。

解答はできるだけ実験2と同じ流れになるように注意した。

【解答】

$y=t(x+2)$ …… ①，　$ty=2-x$ …… ②

点Pの座標を(x,y)とする。

(ア) $x\neq-2,\ y\neq0$ のとき

点(x,y)が①上にあるとき　$y=t(x+2)$

すなわち　$t=\dfrac{y}{x+2}$ …… (i)

点(x,y)が②上にあるとき　$ty=2-x$

すなわち　$t=\dfrac{2-x}{y}$ …… (ii)

点(x,y)が2直線の交点であるとき

$\dfrac{y}{x+2}=\dfrac{2-x}{y}$ …… (*)

すなわち　$x^2+y^2=4$

ただし　$x\neq-2,\ y\neq0$ である。

(イ) $x=-2$ のとき

①より $y=0$ となるが，

このとき②は $t\cdot0=4$ となり，これを満たすtは存在しない。

すなわち点$(-2,0)$が交点となるtは存在しない。

(ウ) $y=0$ のとき

②より $x=2$ となるが，

このとき①は $0=t(2+2)$ より　$t=0$

すなわち点$(2,0)$が交点となるtは $t=0$ である。

(ア)(イ)(ウ)より求める軌跡は　円 $x^2+y^2=4$

ただし，点$(-2,0)$は除く。

§3. 補足

実際の授業では，この問題を初見で解かせるとほとんどの生徒の手が止まっていたが，実験1，2ではよく手が動き，実験の意図を掴んでくれていたようであった。やはり具体的に実験してから解答のイメージをつくる経験は大切である。

問題集や参考書の模範解答には，泥臭い実験は載っていないので，「よくわからないけど，とりあえずtを消去すればいい」という浅い理解で終わってしまう可能性が高い。(*)で見た目上はtを消去しているのだが，気持ちとしては，「(i)でのtの値と(ii)でのtの値が一致するときを考えている」ということを改めて補足した。

この実験を踏まえると，次のような問題も類題として扱える。

§4. 類題

問題

aがすべての実数値をとって変化するとき，直線

$$y=2ax-a^2+1 \quad\cdots\cdots\ ①$$

が通りうる点(x,y)の存在範囲を図示せよ。

§5-1. 実験 1

$a=0$ のとき①は　直線 $y=1$

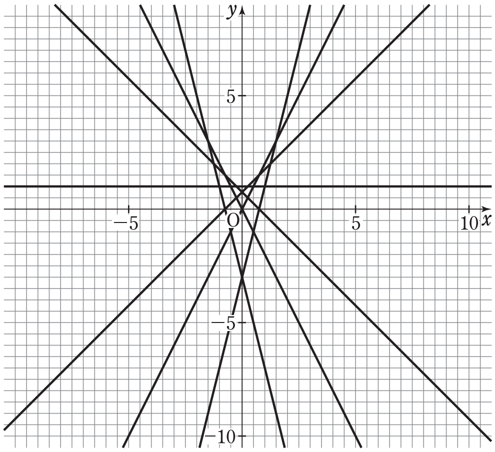
$a=\pm\frac{1}{2}$ のとき①は　直線 $y=\pm x+\frac{3}{4}$

$a=\pm 1$ のとき①は　直線 $y=\pm 2x$

$a=\pm 2$ のとき①は　直線 $y=\pm 4x-3$

……

図示すると次のようになる。



この実験をすべての実数 a に対して行えば直線が通りうる点 $(x,\ y)$ の存在範囲は図示できるが現実的ではない。

§5-2. 実験 2

● 点 $(1,\ 1)$ は求める存在範囲に含まれるか？
すなわち，点 $(1,\ 1)$ を通るような直線①が存在するか？

点 $(1,\ 1)$ が直線①上にあるとき

$$1=2a\cdot 1-a^2+1$$
$$a^2-2a=0$$
$$a=0,\ 2$$

よって，$a=0,\ 2$ のとき直線①は点 $(1,\ 1)$ を通る。
すなわち，点 $(1,\ 1)$ は存在範囲に含まれる。

● 点 $(1,\ 3)$ は求める存在範囲に含まれるか？
すなわち，点 $(1,\ 3)$ を通るような直線①が存在するか？

点 $(1,\ 3)$ が直線①上にあるとき

$$3=2a\cdot 1-a^2+1$$
$$a^2-2a+2=0$$
$$a=1\pm i$$

$a=1\pm i$ は虚数である。つまり，どんな実数 a を用いても直線①に点 $(1,\ 3)$ を通らせることはできない。

すなわち，点 $(1,\ 3)$ は存在範囲に含まれない。

点の座標を①に代入して，a についての 2 次方程式を考えたとき，それが実数解をもつかどうかがポイントである。

§5-3. 実験 2 を踏まえた解答

【解答】 点 $(x,\ y)$ が直線①上にあるのは

$$y=2ax-a^2+1$$
$$a^2-2xa+y-1=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

これが実数解をもつときである。

②の判別式を D とすると

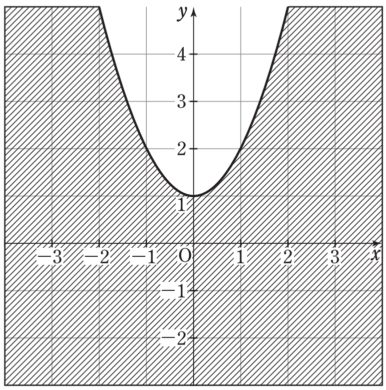
$$\frac{D}{4}=(-x)^2-1\cdot(y-1)=x^2-y+1$$

$D\geqq 0$ より　$x^2-y+1\geqq 0$

$$y\leqq x^2+1$$

よって，求める点 $(x,\ y)$ の存在範囲は下図の斜線部分になる。

ただし境界線は含む。



§6. 終わりに

今回の実験 1 から実験 2 への発想の逆転は入試では頻出であるが，初見で思いつく高校生はまれであるように思う。文字の存在に帰着させる問題は難易度が高めであるが，実験をすることにより見通しよく解答が書けることを今後も生徒たちに伝えていきたい。

《参考文献》

〔1〕「改訂版　サクシード数学Ⅱ＋B」 数研出版

(埼玉県立蕨高等学校)