

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

いがらし まさはる
五十嵐 正晴

§1. はじめに

日常生活において当然の如く使用している10進法。「0から順に数えてみよう。」と投げかければ、大人から子どもまで迷わずタイトル通りの順で数えていくだろう。

さて、ここで1つの疑問が湧いた。もし明日にでも「0, 4, 9, 3, 7, 2, 8, 6, 1, 5の順に変更する。」のような事態になった場合、これまで培ってきた数に対する感覚との乖離に果たして抗うことができるのだろうか。

§2. n 進法に関する問題

先ほど述べた事態が発生する可能性は低いいため、擬似的にこの事態を考察するための問題を準備し、高校生および数学教員に解答の作成を依頼した。

問1 n は $2 \leq n \leq 9$ を満たす自然数とする。

どの位にも n 以上 9 以下の数が現れない自然数のうち、 k 番目に小さい数を $N(n, k)$ とする。次の値を求めよ。

- (1) $N(8, 8)$
- (2) $N(6, 2022)$

問2 n は $2 \leq n \leq 9$ を満たす自然数とする。

どの位にも n の正の約数が現れない自然数のうち、 k 番目に小さい数を $N(n, k)$ とする。次の値を求めよ。

- (1) $N(8, 8)$
- (2) $N(6, 2022)$

問1は、 n 進法表記で k 番目に小さい数を求めるだけであり易しい。実際に、 n 進法の考え方を使わない解答は1つも得られなかった。

問2に関しては2つの解法を想定していた。

※(1)の解答は省略

【(2)の想定解1 (n 進法)】

6進法表記で2022番目に小さい数は $13210_{(6)}$ である。 $N(6, 2022)$ は、0, 4, 5, 7, 8, 9 だけが現れる数のうち2022番目に小さい数であるから、0, 1, 2, 3, 4, 5を0, 4, 5, 7, 8, 9と対応させて考えればよい。

したがって $N(6, 2022) = 47540$

現れる数が0, 4, 5, 7, 8, 9のみであるから、位取りの基礎となる数は6であり、6進法を用いる解法が本来は最も自然である。しかし、実際の解答を拝見すると、問2を解いた14名中12名が以下の想定解2の考え方で解いていた。

【(2)の想定解2 (重複を許す辞書式配列)】

0, 4, 5, 7, 8, 9 だけが現れる数のうち、 i 桁である数の総数は $5 \cdot 6^{i-1}$ 個である。

ここで

$$\sum_{i=1}^4 5 \cdot 6^{i-1} < 2022 < \sum_{i=1}^5 5 \cdot 6^{i-1}$$

より、 $N(6, 2022)$ は5桁の数である。

0, 4, 5, 7, 8, 9 だけが現れる5桁の数について、最高位が4である数の総数は 6^4 個であり、

$$\sum_{i=1}^4 5 \cdot 6^{i-1} + 6^4 = 2591 > 2022$$

より、 $4 \cdot 10^4 \leq N(6, 2022) < 5 \cdot 10^4$ である。

以下、同様の考え方により各位の値を考えると

$$\sum_{i=1}^4 5 \cdot 6^{i-1} + 6^3 \cdot 3 + 6^2 \cdot 2 + 6^1 \cdot 1 < 2022$$

$$< \sum_{i=1}^4 5 \cdot 6^{i-1} + 6^3 \cdot 3 + 6^2 \cdot 2 + 6^1 \cdot 2$$

であり

$$\sum_{i=1}^4 5 \cdot 6^{i-1} + 6^3 \cdot 3 + 6^2 \cdot 2 + 6^1 \cdot 1 = 2021$$

であるから $N(6, 2021) = 47509$

したがって $N(6, 2022) = 47540$

§3. 作成していただいた解答および想定解について

「0, 1, 2, 3, 4, 5しか現れない数」であれば6進法の考えを使って解くが, 「0, 4, 5, 7, 8, 9しか現れない数」となると途端に6進法の考えを使いづらくなってしまふ。想定解についても, 0, 1, 2, 3, 4, 5しか現れない数を考えてから0, 4, 5, 7, 8, 9と対応させており, 想定解も含めて計算をしながら対応させている解答は当然ながら1つもなかった。0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9という順序は強固に染みついており, その感覚を一新することが極めて難しいということは想像に難しくない。

§4. おわりに

冒頭のような事態になった場合, 私たちが従来の感覚を捨て, 新たな数に慣れそれを使用できるようになるまで膨大な時間がかかるだろう。長い間積んできた経験が私たちの思考を構成しているのだということ, 改めて実感した。

本稿の執筆にあたって, 解答の作成に御協力いただいた他校の先生方および生徒の皆様, この場をお借りして厚く御礼申し上げます。

(山口県立下関南高等学校)