アポロニウスの円の 2 点について

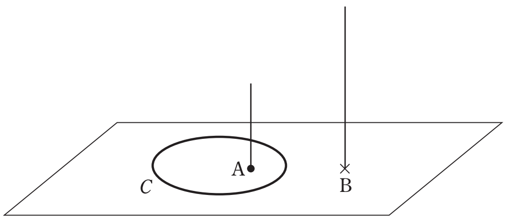
裏（うら）　俊男（としお）

§1. はじめに

Eテレの 5 分番組の中で「アポロニウスの円」の歌という曲が流れていた。東京タワー(高さ 333 m)，東京スカイツリー(高さ 634 m)から，333：634 の距離の比にある点の軌跡は円をなし，この円周上の地点から 2 つのタワーを眺めると同じ高さに見える，というのである。教科書では，平面上で 2 点からの距離の比が一定(1：1 を除く)の点が動いて描く軌跡は円になる，という結果を学ぶのみだが，3 次元で定理を省みると，無色の定理に彩が感じられてくる。数学嫌いの生徒でも，東京タワーと東京スカイツリーが同じ高さに見える地点で確かめてみたくなるのではないだろうか。

§2. 逆問題を考えてみる

円 C と，その内部に中心Oと一致しない点Aがあるとき，

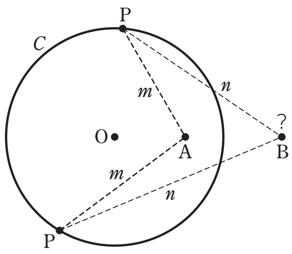


『円外の地点Bで，
円周上のどこから見ても地点Aにある
建物と同じ高さに見える建物が存在する
地点Bの位置を求める』

ことを考えてみる。
このように書いたが，円はアポロニウスの円なので，

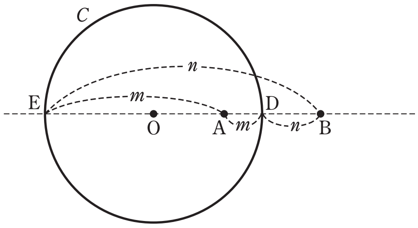
『ある m，n $(0<m<n)$ があり，
円 C 内の中心と異なる点Aについて，
PA：PB $=m:n$ である点Pの軌跡が円 C に一致するような点Bの位置を求めよ。』

ということになる。



§3. 作図する

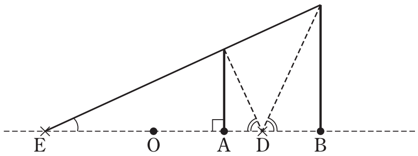
アポロニウスの円は，2 点を結ぶ線分を同じ比に内分，外分する点を直径の両端とする円になる。



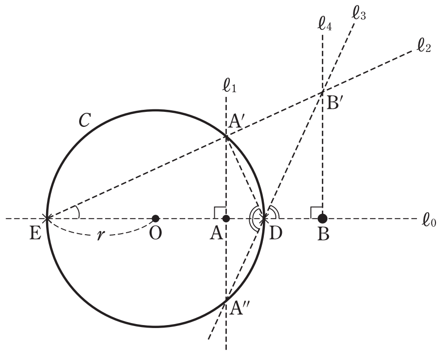
よって，特に

$$\mathrm{DA}:\mathrm{DB}=\mathrm{EA}:\mathrm{EB}$$

が成り立つ点Bの位置を求めればよい。
また，
　　高さの異なる立体が同じ高さに見える
というのは，
　　仰角が同じである
ということになる(というより，円周上のどこにおいても A，B に立つ建物への正接が等しいので，仰角は同じである，と言うべきか)。



建物は地面に垂直に立っているが，円周上の点の D，E のみ使えばよいので，この図をそのまま円を含む平面に重ねてしまう。
そして，地点 A，B に立つ建物は，高さの比が問題なので，絶対的な高さの値は何でもよい。
よって，点Aに立つ線分についての点 D，E からの仰角が同じであるような線分が立てる点Bの位置を求めることになる。
結局，下図のように ℓ_0，ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3 と順に線を引き，ℓ_2，ℓ_3 の交点から l_0 に垂線 l_4 を下せば，その垂線の足が求める点Bである。

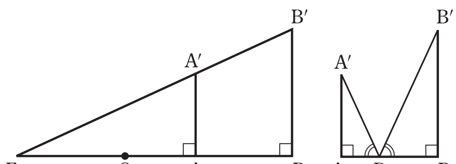


アポロニウスの円は，
『平面上に垂直に立つ異なる長さの 2 つの線分に対して同じ正接（仰角）である点が平面に描く軌跡』
である。

§4. 反転

アポロニウスの円に対して，始まりの 2 点 A，B をアポロニウスの点と呼んでおく（決まった名前があるのでしょうか？）

もとになった図をもう一度考えてみる。



△A′EA と △B′EB の相似比は

$$\mathrm{EA}:\mathrm{EB}=(r+\mathrm{OA}):(r+\mathrm{OB})$$

△A′AD と △B′BD の相似比は

$$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=(r-\mathrm{OA}):(\mathrm{OB}-r)$$

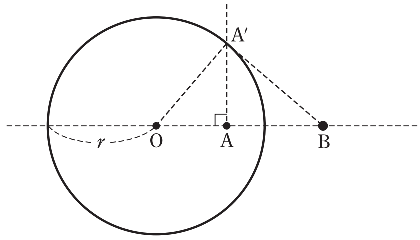
この相似比は同じだから

$$(r+\mathrm{OA}):(r+\mathrm{OB})=(r-\mathrm{OA}):(\mathrm{OB}-r)$$

これを簡約すると

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=r^2$$

を得る。
よって，点 A，B は円 C についていわゆる反転の位置にあるが，アポロニウスの円と反転の関連はすでに知られていることである。
ところで，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=r^2$ だから



$$\begin{aligned}\mathrm{A'B}^2&=\mathrm{A'A}^2+\mathrm{AB}^2\\&=(r^2-\mathrm{OA}^2)+(\mathrm{OB}-\mathrm{OA})^2\\&=r^2-\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}+\mathrm{OA}^2\\&=r^2-\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2r^2+\mathrm{OA}^2\\&=\mathrm{OB}^2-r^2\end{aligned}$$

よって　$\mathrm{OA'}^2+\mathrm{A'B}^2=\mathrm{OB}^2$
ゆえに　$\angle\mathrm{OA'B}=90^\circ$
したがって，A′，A″ はBから円に引いた接線の接点である。

§3 では，円と円内の点から円外のアポロニウスの点を求めたが，円と円外の点から円内のアポロニウスの点を求めるには，円外の点から円に 2 本の接線を引き，接点を結ぶ線分の中点を求めればよい。
平面上で考えた時，2 点からの距離の比が一定の点の軌跡は円になるが，空間で考えた時には当然球面になる。このことは導体球近くに点電荷があるときの静電場（等ポテンシャル面）を考える，といった応用にもつながる。

反転変換によって無窮遠における調和関数のふるまいを調べるなどは，もはや専門書の領域だが，反転によって直線や円が相互に写されることを理解するのは高校数学の手の届くところにある。

《参考文献》

〔1〕　数学でピザを切り分ける!　第 118 話の解答
　　（日経サイエンス社）

（元東京都立小山台高等学校）