変数変換 $x=\tan\theta$ の謎

～θ はどこから来たのだろうか～

高瀬（たかせ）　正仁（まさひと）

§1. はじめに

定積分 $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ の数値の算出にあたって，変数変換 $x=\tan\theta$ を利用するのはこの場合の常套手段である。正接関数 $\tan\theta$ の変数 θ の変域を $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$ に限定すると，この変域内の θ と実変数 x の変域 $(-\infty,\ +\infty)$ が等式 $x=\tan\theta$ により 1 対 1 に対応するという状況に，この変数変換の有効性の根拠が認められる。計算を進めると，まず微分計算により 2 つの微分 dx, $d\theta$ の関係 $dx=\frac{d\theta}{\cos^2\theta}$ が得られる。次に x の変域を $0\leqq x\leqq 1$ に限定すると，これに対応して θ の変域は $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{4}$ に限定される。これにより $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta}\times\frac{d\theta}{\cos^2\theta}=\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\frac{\pi}{4}$ と計算が進行して積分値 $\frac{\pi}{4}$ が得られる。この計算に問題があるわけではないが，では変数 θ はどこからやってくるのであろうか。また，他の変数変換はありうるのであろうか。この論点を複素変数関数の視点に立ってもう少し掘り下げてみたいと思う。

§2. 複素変数関数の視点から

定積分を離れてオイラーのいう意味において積分

$$y=\int\frac{dx}{1+x^2}$$

を考察する。右辺は関数 $\frac{1}{1+x^2}$ の積分ではなく，微分式 $\frac{dx}{1+x^2}$ の積分であり，y は微分方程式

$$dy=\frac{dx}{1+x^2}$$

を満たす変数である。変数の変域を複素数域に拡大すると，$1+x^2=(1+ix)(1-ix)$ と因数分解が進行し，これにより $\frac{1}{1+x^2}$ が部分分数に分けられて

$$y=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+ix}+\frac{1}{1-ix}\right)dx$$

と表示され，複素対数積分

$$y_+=\int\frac{dx}{1+ix}=\frac{1}{i}\log(1+ix),$$

$$y_-=\int\frac{dx}{1-ix}=-\frac{1}{i}\log(1-ix)$$

に遭遇する。

複素 z 平面上に $z=1$, $z=1+ix$, $z=1-ix$ に対応する点 A$(1,\ 0)$ と点 M$_+(1,\ x)$, M$_-(1,\ -x)$, B$(\sqrt{1+x^2},\ 0)$ を定め，A と M$_+$, M$_-$ を結ぶ道をつくると複素対数積分 $\log(1\pm ix)$ の表示が手に入る。実軸に沿って A から B にいたる道を m とする。原点を中心として半径 $\sqrt{1+x^2}$ の円を描き，この円に沿って B から M$_+$, M$_-$ にいたる道をそれぞれ C_+, C_- で表す(図 1)。このとき，2 つの複素対数は道 m, C_+, C_- に沿う積分により

$$\log(1+ix)=\int_m\frac{dz}{z}+\int_{C_+}\frac{dz}{z}+\alpha_+,$$

$$\log(1-ix)=\int_m\frac{dz}{z}+\int_{C_-}\frac{dz}{z}+\alpha_-$$

と表示される。α_+ と α_- は複素対数の無限多価性を反映する不定定数である。

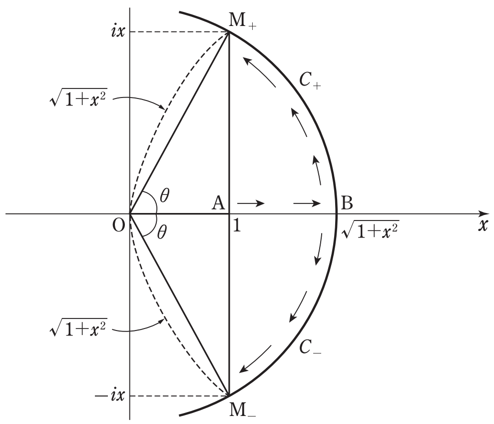

図1

3つの積分を計算しなければならないが，まず

$$\int_m \frac{dz}{z}=\log\sqrt{1+x^2}$$

となる。これは実対数の周知の積分表示である。次に，弧 C_+ のパラメータ表示

$$z=\sqrt{1+x^2}e^{i\phi},\ 0\leqq\phi\leqq\theta$$

を設定する。ここで θ は $1+ix$ の偏角である。これにより

$$\int_{C_+}\frac{dz}{z}=\int_0^\theta\frac{\sqrt{1+x^2}ie^{i\phi}d\phi}{\sqrt{1+x^2}e^{i\phi}}=i\int_0^\theta d\phi=i\theta$$

と計算が進行する。同様に計算して，

$$\int_{C_-}\frac{dz}{z}=-i\theta$$

となることも判明する。これらの計算結果を集めると，

$$y_+=\frac{1}{i}\log\sqrt{1+x^2}+\theta+\frac{\alpha_+}{i},$$

$$y_-=-\frac{1}{i}\log\sqrt{1+x^2}+\theta-\frac{\alpha_-}{i}$$

となる。そこで $\alpha=-\frac{1}{2i}(\alpha_+-\alpha_-)$ と定めると，$y=\theta-\alpha$。よって $y+\alpha=\theta$ となるが，パラメータ θ と x の相互依存関係に立ち返ると，これらは等式 $x=\tan\theta$ により結ばれている(図1参照)。それゆえ，等式

$$\tan(y+\alpha)=x$$

が得られる。この等式は当初の微分方程式 $dy=\frac{dx}{1+x^2}$ の一般解にほかならない。

y を x の関数と見れば無限多価関数であり，逆正接関数を用いて

$$y=\int\frac{dx}{1+x^2}=\arctan x-\alpha$$

と表示される。$-\alpha$ は積分 $\int\frac{dx}{1+x^2}$ の積分定数と呼ばれる不定数で，階数1の常微分方程式 $dy=\frac{dx}{1+x^2}$ の解法に伴って必然的に出現する。方程式 $\tan(y+\alpha)=x$ により表される曲線は相互に交差することのない同じ形の無数の枝が並列して形成されるが，どの枝に沿っても等式 $\int\frac{dx}{1+x^2}=y$ が成立する。

どの枝でもさしつかえないが，たとえば点 $\mathrm{P}(0,\ -\alpha)$ を通る分枝(図2)に着目すると，この分枝は点 $\mathrm{Q}\left(1,\ -\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ を通過する。2点P，Qにおける y 座標の差を作ると，積分値

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\left(-\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-(-\alpha)=\frac{\pi}{4}$$

が算出される。

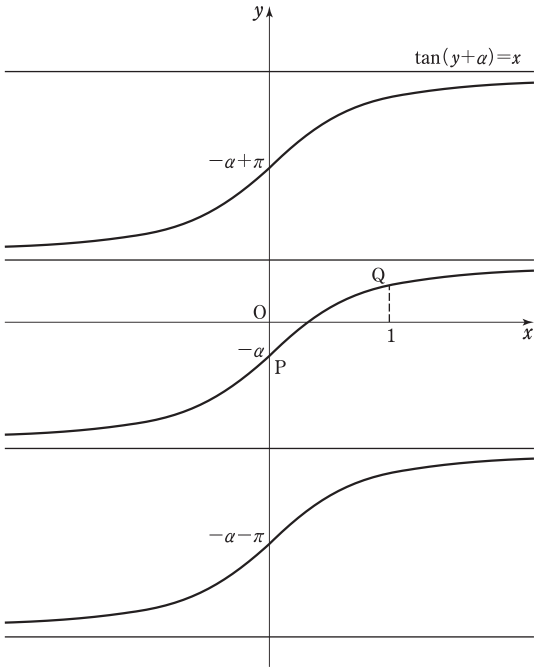

図2

§3. 最後に

これで変数変換 $x=\tan\theta$ における θ は複素数 $1+ix$ の偏角であることが明らかになった。この変数変換は定積分 $\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}$ の計算に適合する唯一のものではなく，一般に任意の定数 α に対して変数変換 $x=\tan(\theta+\alpha)$ を採用しても同じ結果に到達する。たとえば $\alpha=\frac{\pi}{2}$ をとれば $x=-\cot\theta$ となる。

実変数の微積分の背景には複素変数の微積分の世界が広がっている。

(元九州大学基幹教育研究院)