対称条件から考える内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の最大値と最小値

いのうえ
井上　ゆい

§1. はじめに

3年生向けに入試問題演習をしたく，Studyaid D.B. でベクトルの内積の問題を探していたところ，次のような問題が目に留まりました。

「半径1の円周上に3点 A，B，C がある。内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の最大値と最小値を求めよ。」

という問題で2020年に一橋大学で出題された問題でした。問題設定は至ってシンプルで，美しい問題だと感じました。単純な問題設定であるだけに，類題もなかなか思いつかず，どこから手を付けるのが良いのか迷ってしまいます。数学的なセンスを問うような問題だと思いました。

Studyaid D.B. に掲載されている解答は2通りありました。1つ目はBとCの中点Dをとり，ベクトルを利用してこのDの位置の変数化により最大値・最小値を求めるもの。なかなか洗練された解法ですが，BとCの中点をとるというアイデアを思いつかない限り，このやり方にはたどり着きません。そういう点でハードルの高い解法だと思いました。

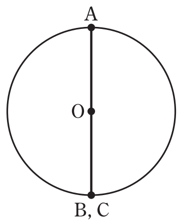
もう1つは，円を単位円に重ねて，A，B，C の座標を三角関数によって与えます。そして，OA と OB のなす角と OA と OC のなす角を変数として最大値・最小値を求めていました。とりあえず座標表示してみるという方法で，とっつきやすい方法ではあります。しかし，解答を見てみると，和と積の公式を使ったり，テクニカルな不等式評価をしたりと，なかなか初見では難しい式変形をしていました。

どちらも，入試の解答としては申し分ないのですが，(私の数学力不足もありましょうが)どちらの解も難しく感じました。これだけシンプルな問題だからこそ，本質をついた美しい解が潜んでいるのではと思い，(もう少し簡単な)別解を求めていろいろと数式をいじってみました。

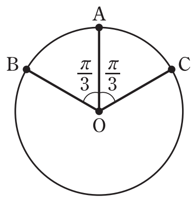
§2. 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の定式化

内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を考える上で2点 B，C は対称なので，この対称性の美しさを生かした解法を探しました。つまり最大・最小といった極値は対称性を保った状態で実現されるのではないかと考え，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ が最大・最小になるための必要条件は OA を軸としたときの2点 B，C の対称性であるという仮説を立てました。

実際に，この問題の答えは B，C は同じ点で AB，AC がともに直径になっているときに最大値4を，OA と OB，OA と OC のなす角がそれぞれ $\dfrac{\pi}{3}$ のときに最小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとるとなっています。

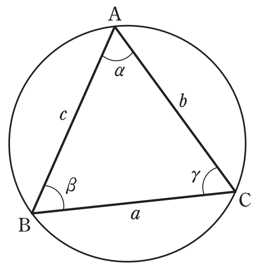


最大値の場合



最小値の場合

これを示すためにまず，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の定式化を行います。次のように文字をおきます。



このとき内積の定義から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=b\cdot c\cdot\cos\alpha$$

です。また，この円の半径が 1 であることに注意すると正弦定理から

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2$$

が得られます。よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=4\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

となります。これによりβ，γが対称な式が得られました。いま，変数はα，β，γの 3 種類ですが，$\alpha+\beta+\gamma=\pi$ という関係式があるので実質的には 2 つです。さらに $\beta=\gamma$ が示せれば 1 変数に帰着できます。

$-1\leqq\cos\alpha\leqq1$ で，$0\leqq\sin\beta$，$\sin\gamma\leqq1$ であるので，$\cos\alpha>0$ のときに最大値を $\cos\alpha<0$ のときに最小値をとると予測できます。よって，αを固定したときに，$\sin\beta\sin\gamma$が最大値をとる条件を考えます。実はこのとき，$\beta=\gamma$ で $\sin\beta\sin\gamma$は最大値をとることが示せます。

§3. 対称条件

実際に次の命題を示します。

命題：「αを固定したとき，$\sin\beta\sin\gamma$は $\beta=\gamma$ のときに最大値をとる」

この命題を示すため，αを固定しているので $\beta+\gamma\,(=\pi-\alpha)$ の値を一定に保ったまま，βとγを微小量$\varDelta$だけ変化させることを考えます。そこで

$$f(\varDelta)=\sin(\beta+\varDelta)\sin(\gamma-\varDelta)$$

と定めます。

変化を見るために差をとって，加法定理で式変形をします。すると，

$$\begin{aligned}
&f(\varDelta)-f(0)\\
&=\sin(\beta+\varDelta)\sin(\gamma-\varDelta)-\sin\beta\sin\gamma\\
&=(\sin\beta\cos\varDelta+\cos\beta\sin\varDelta)(\sin\gamma\cos\varDelta\\
&\qquad\qquad-\cos\gamma\sin\varDelta)-\sin\beta\sin\gamma\\
&=-\cos(\beta-\gamma)\sin^2\varDelta-\sin(\beta-\gamma)\sin\varDelta\cos\varDelta\\
&=-\sin(\beta-\gamma+\varDelta)\sin\varDelta
\end{aligned}$$

となります。

よって，$\beta=\gamma$ のとき，

$$f(\varDelta)-f(0)=-\sin^2\varDelta<0$$

なので，$f(\varDelta)-f(0)<0 \Leftrightarrow f(\varDelta)<f(0)$ です。つまり，$\beta=\gamma$ で $\sin\beta\sin\gamma$は極大となります。

また $\beta\neq\gamma$ のときは，一般性を失わないため，$\beta>\gamma$ と仮定します。このとき微小量$\varDelta$は十分小さいため

$$|\varDelta|\leqq\min\left(\frac{\beta-\gamma}{2},\ \frac{\pi-(\beta-\gamma)}{2}\right)$$

を満たしているとしてよく，$\dfrac{\beta-\gamma}{2}<\beta-\gamma$ と $\dfrac{\pi(\beta-\gamma)}{2}<\pi-(\beta-\gamma)$ に注意すると，この条件より

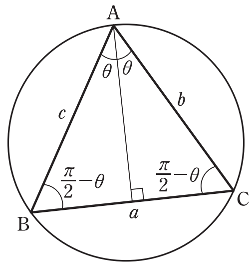
$$0<\beta-\gamma+\varDelta<\pi$$

つまり $\sin(\beta-\gamma+\varDelta)>0$ となります。よって $\varDelta>0$ ならば $f(\varDelta)-f(0)<0 \Leftrightarrow f(\varDelta)<f(0)$ が，$\varDelta<0$ ならば $f(\varDelta)-f(0)>0 \Leftrightarrow f(\varDelta)>f(0)$ が成り立ちます。つまり $\beta>\gamma$ のときは，βの値を減らし，γの値を増やす方向に変化させることで $\sin\beta\sin\gamma$の値が増大するということが言えます。

これらの結果をまとめると，$\beta=\gamma$ のときに $\sin\beta\sin\gamma$は最大値をとります。

§4. 対称条件下での問題の再定式化

先ほど示した対称条件 $\beta=\gamma$ を用いて，再度内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を計算します。まず，$\alpha=2\theta$ とおきなおすと，$\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ となります。図にすると次のようになります。



このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を 2 倍角の公式と sin と cos の関係を用いて計算すると，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=4\cos2\theta\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\
&=4(2\cos^2\theta-1)\cos^2\theta\\
&=8\left(\cos^2\theta-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

となり，$\cos^2\theta$の多項式に帰着されました。平方完成もできますので，$0\leqq\cos^2\theta\leqq1$ に注意すれば答えが得られます。$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ であったので，$\cos^2\theta=1$ つまり，$\theta=0$ で最大値 4 を，$\cos^2\theta=\dfrac{1}{4}$ つまり $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ で最小値 $-\dfrac{1}{2}$ をとります。

§5. まとめ

対称条件さえ示してしまえば，この問題は１変数の最大値・最小値の問題になります。しかも平方完成で片付くような，簡単な最大値・最小値の問題になります。対称条件を示すのが少し面倒ですが，先の見通しが立てやすいという点で，この別解を紹介させてもらいました。対称性のある問題は，その対称性にこそ本質があるという気持ちを裏付けるような問題だったと思いました。

ちなみに $\sin\beta\sin\gamma$ の最大値を考える際に，変化を見るために微小量の差をとって計算しましたが，本質的には微分ですので，微分を計算しても同様の結果が得られます。

《参考文献》

〔１〕 数研出版　2020 数学Ⅰ・Ⅱ・Ａ・Ｂ入試問題集 文理系

（神奈川県立有馬高等学校）