

教科横断的な授業実践

～地震を図形の方程式で捉える～

もりの たかひろ
森野 高広

§1. きっかけ

数学Bの「空間ベクトル」の学習で、「空間の問題を想像することが難しい」や「ベクトルの計算はできるが、実際に何が起きているかわからない」と感じていた生徒が多かった。想像しにくい空間図形の問題を機械的に処理することができることは、空間ベクトルの良さではあるが、実際の現象と絡めた題材で、この単元の良さを感じてもらいたいと思った。そこで私が、教材として採用したのが地震の震源の深さを求める問題である。地震の波は震源から観測地に向かって直接伝わってくる。この現象を捉えるためには空間図形の考え方が必要であり、今回は球の方程式を活用した解法を紹介する。

§2. 地震の基礎知識について

この教材を扱うためには、中学理科の知識がある程度必要になる。授業の最初には地震の現象についての以下のような知識を確認するようにした。

○地震

地下の岩石が破壊されることで大地が揺れる現象

○地震波

震源断層から発せられ、岩盤・地層中を伝わる波

○P波

先に伝わる波。この波による揺れを初期微動という。

○S波

次に伝わる波。この波による揺れを主要動という。

○初期微動継続時間

最初にP波が到達し、次にS波が到達するまでの時間

§3. 扱う教材の説明について

今回扱う問題や地図について以下のような注意を行う。

○本問題は実際に起こった地震ではなく空想のものである。

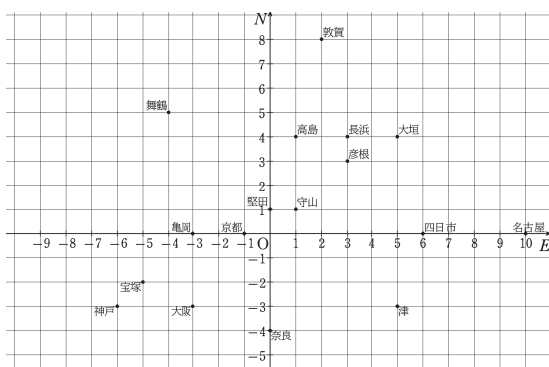
○次の図は天津市を中心とした実際の縮尺に合わせた地図である。

○上側が北で、右側が東を表し、1目もり10kmの距離である。

○問題文にある、初期微動による揺れはP波、主要動による揺れはS波によるものとする。

○各地点の標高はすべて0mとし、地球が球面であることは考慮しない。

○ $\sqrt{2}=1.4$, $\sqrt{3}=1.7$, $\sqrt{5}=2.2$, $\sqrt{7}=2.6$, $\sqrt{11}=3.3$, $\sqrt{13}=3.6$ を用いてもよい。



§4.1. 地震の震央の位置、震源の深さを求める①

【問題】 ある地震が関西圏内で起こった。このとき「長浜」、「舞鶴」、「宝塚」の3地点で同時刻に初期微動と主要動を観測した。この時、初期微動継続時間は各3地点とも3.5秒であった。今回の地震におけるこの地域一帯のP波の速さを秒速5km、S波の速さを秒速4kmとする。

次の問いに答えよ。

- (1) この地震の震央の位置を求めよ。
- (2) この地震の震源の深さを求めよ。

【解答】

- (1) 「長浜」, 「舞鶴」, 「宝塚」の各地点を N, M, T とする。

この3地点で同時に初期微動と主要動を観測したため、震央から各3地点までの距離は等しい。

つまり、この3点を通る円の方程式を $x^2 + y^2 + lx + my + n = 0$ とすると、この円の中心が震央と一致する。

この円が、N(3, 4)を通るから

$$3^2 + 4^2 + 3l + 4m + n = 0$$

M(-4, 5)を通るから

$$(-4)^2 + 5^2 - 4l + 5m + n = 0$$

T(-5, -2)を通るから

$$(-5)^2 + (-2)^2 - 5l - 2m + n = 0$$

これらを整理して、解くと

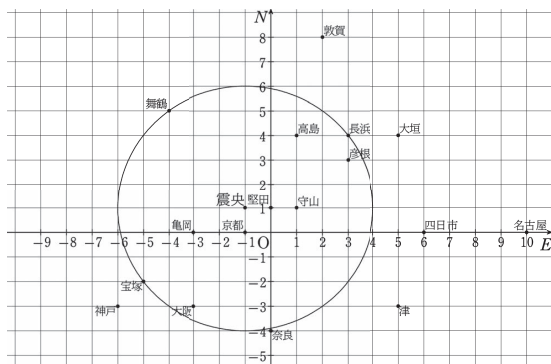
$$l = 2, m = -2, n = -23$$

よって $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$

これを式変形すると $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 25$

中心は点(-1, 1), 半径5の円となり、

震央は大津から西に10km, 北に10kmの地点である。

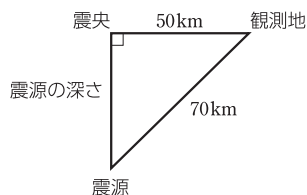


- (2) 各地点から震源までの距離を l km とする。初期微動を観測するまでの時間を t 秒とすると

$$\begin{cases} l = 5t \\ l = 4(t + 3.5) \end{cases} \quad \text{これを解くと} \quad t = 14, l = 70$$

(1)より震央までの距離は50kmであり、三平方の定理より震源の深さは

$$\sqrt{70^2 - 50^2} = 20\sqrt{6} = 20 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \approx 47.6 \text{ km}$$



§4.2. 地震の震央の位置、震源の深さを求める②

【問題】 ある地震が関西圏内で起こった。このとき「敦賀」, 「亀岡」, 「四日市」の3地点で、震源で地震が発生してから最初の揺れを観測するまでの時間を計測した。「敦賀」では地震が発生して12秒後に初期微動を観測した。「亀岡」では地震が発生して10秒後に初期微動を観測した。「四日市」では地震が発生して14.4224秒後 ($4\sqrt{13}$ 秒として計算してください) に初期微動を観測した。今回の地震におけるこの地域一帯のP波の速さを秒速5km, S波の速さを秒速4kmとする。次の問いに答えよ。

- (1) この地震の震央の位置を求めよ。
- (2) この地震の震源の深さを求めよ。

【解答】

- (1) 「敦賀」, 「亀岡」, 「四日市」の各地点を T, K, Y とする。(この点は空間座標とする)

震源から敦賀までの距離は $5 \times 12 = 60$ km

よって、震源はTを中心として半径60kmの球面上にある。この球面の方程式は

$$(x-2)^2 + (y-8)^2 + z^2 = 36 \quad \dots\dots(I)$$

同様に、震源から亀岡までの距離は

$$5 \times 10 = 50 \text{ km}$$

震源はKを中心として半径50kmの球面上にあり

$$\text{球面の方程式は } (x+3)^2 + y^2 + z^2 = 25 \quad \dots\dots(II)$$

震源から四日市までの距離は

$$5 \times 4\sqrt{13} = 20\sqrt{13} \text{ km}$$

震源はYを中心として半径 $20\sqrt{13}$ km の球面上にあり

$$\text{球面の方程式は } (x+3)^2 + y^2 + z^2 = 25 \quad \dots\dots(III)$$

震源は3つの球面の共有点であるため

$$(II)-(I) \text{ より } 5x + 8y = 24 \quad \dots\dots(IV)$$

$$(III)-(II) \text{ より } x = 0, (IV) \text{ に代入して } y = 3$$

これより震央の位置は大津から北に30kmの地点

(2) (1)に代入して $z = \pm\sqrt{7}$

震源の z 座標は負の数と定めると、

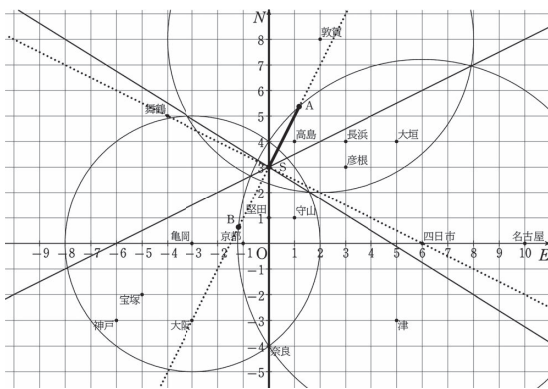
震源の座標は $(0, 3, -\sqrt{7})$

よって震源の深さは $\sqrt{7} \times 10 \doteq 26 \text{ km}$

§5. 地学における求め方

地学ではコンパスと定規を用いて作図による求め方がある。次の手段で作図すると震央の位置と、震源の深さが平面上にも現れることになる。

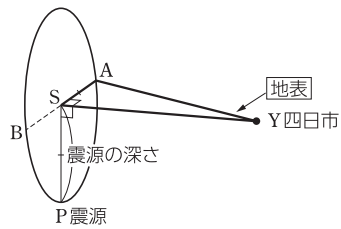
- ① 観測地を中心として震源までの距離を半径とする円を描く。
- ② 円と円の交点を通る直線を計3本引く。
- ③ 3本の直線の交点Sが震央となる。
- ④ 1つの観測地(下の図は四日市)と震央を通る直線に対して震央を通る垂線を引く。(図の点線)
- ⑤ ④の垂線とその観測地を中心とする円との交点A, Bをとる。
- ⑥ ⑤の交点と震央までの距離ASまたはBS(図の太字)が震源の深さになる。



生徒にはなぜ以上の①～⑥の方法で震源の深さが求められるかを考えさせる。球と球の共有点の集合が円になる。また、その円の中心が震央となるため、震源の深さ、線分ASはともに円の半径と一致する。

図1は授業で生徒が線分ASの長さが震源の深さと一致する理由について説明する際に使った図である。

図1



§6. ICTの活用

本授業では、空間で起こる事象を想像し、数学の問題として捉えることで、問題解決していくことを目的にしていた。そのため、生徒が答えにたどり着くまでは、グラフを作成するソフトで確認することはしなかった。基本的には生徒がノートや黒板に記述した図のみで問題解決を行った。生徒同士の説明やグループでの協議、生徒の発表などで書面上解答にたどり着いたときに、グラフ作成ソフトで球の方程式を立体的に見せた。その時に、考えていた通りになったと満足げな生徒もいれば、それまで説明を聞いて納得できなかったことがわかったと感じた生徒もいた。

図2

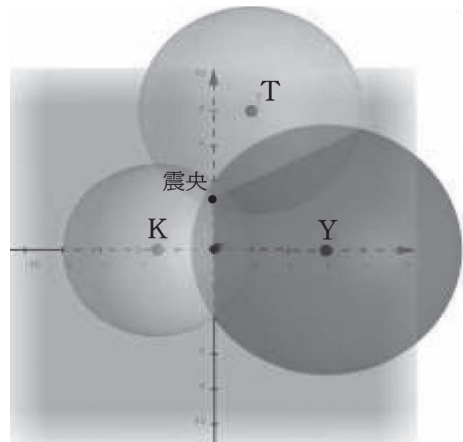


図2は§4.2の問題での球面の方程式を上空から見て、 $z=0$ の平面での図形である。ちょうど真ん中で1点で交わる場所が震央である。しかしここでは、球面は $z=0$ の平面上で交わっているのではなく、地下深く、つまり $z<0$ の点で共有している。

図3

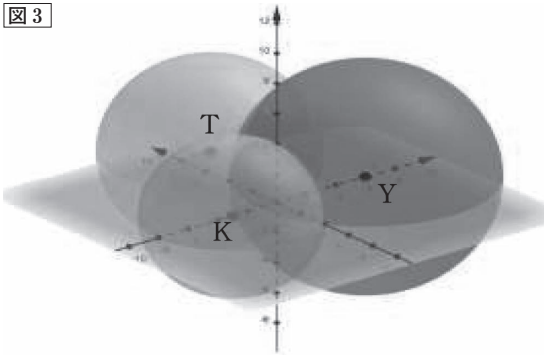


図2は§4.2の問題での球面の方程式を立体的に見たものである。ここで震央と震源の違いについて明らかになるだけでなく、球面の方程式を使って求める理由も理解できる。

本問題だけでなく、ICTの活用については慎重に扱うべきであると考え。各々の授業で何を目的にするかによってICTを活用することが効果的であるかを常に吟味する必要がある。単に「わかりやすいから」、「図を描く手間が省ける」という理由のみでICT教材を使用するのでは、生徒に対して適切な負荷を与えられないことに繋がってしまう。本時のように、想像しにくい空間図形を途中で見せてしまうと、生徒の思考は止まる可能性がある。生徒たちなりに納得した解答を出した後に確認をしたり、生徒が説明する際に使う補助的な図として扱ったりした。授業の展開、生徒の反応に応じて、どこまでの図を掲示するかを柔軟に判断することが望ましい。

§7. おわりに

地震の震源の深さを求める際に観測するまでの時

間と同じ§4.1の場合は円の方程式を用いて、空間の事象を平面のみで扱うことができた。しかし、実際には各観測地での時間が同じになることはほとんどない。より現実的な問題としては§4.2の内容が適切である。ただ、いきなり§4.2の内容に取り組むと空間のイメージがつかめない可能性があり、まずは§4.1の問題に取り組むことで地震という現象を空間的に捉える機会とする。また、最後に数式を用いない地学の方法についても考えることで、地学でも数学が生かされていることを知ってもらいたい。今後は教科横断的に様々な教材を扱うことで、多面的な視点を持つだけでなく「数学の良さ」をより多くの生徒が感じてもらうようなきっかけを作りたい。

また、本教材では地震の波の伝わる速さや震源の深さの数値は実際に起こりうる値を採用している。しかし、地学の視点で考えると本教材は厳密さに欠ける。例えば、波の伝わる速さは本問題では常に一定の速さであると仮定をしたが、実際には地震が起きた周辺の地質によって速さは異なるものとして考えなくてはならない。このように本教材で踏まえられていない現象は多数あるが、今後地学を深く学習する生徒にとってより興味を持つきっかけとなれば幸いである。

《参考文献》

- [1] 「数学B」 数研出版
- [2] 「地学基礎 改訂版」 啓林館
- [3] 「ニューステージ新地学図表」 浜島書店
(滋賀県立守山高等学校)