# 生徒の誤答から

伊藤（いとう）　裕（ゆたか）

## §1. はじめに

定期試験で，次の典型的な問題を出題した。

**[問題A]**　$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$ のとき，この三角形の最も大きい角の大きさを求めよ。

**(解答)**　正弦定理から3辺の長さの比が $7 : 5 : 3$ とわかるので，最も長い辺に向かい合っている$A$が最大の角である。そして，余弦定理より

$$\cos A = \frac{5^2+3^2-7^2}{2\cdot5\cdot3} = -\frac{1}{2}$$

となるので，最大の角の大きさは $120^\circ$ である。□

この[問題A]を採点してみると，$84^\circ$ と解答した生徒が複数名いた。同じ科目を担当しているもう一人の教員が採点した中にも $84^\circ$ と解答した生徒がおり，「間違えるにしても，なぜ有名角以外の答えが出てくるんだろうね」と話題に上った。

そこで，誤答の理由を考えてみたが，

$$\frac{7}{7+5+3}\times180^\circ = 83.9\cdots^\circ$$

という有り得ない計算をした結果，$84^\circ$ と解答したのだとわかった。

すると，自然に「この有り得ない計算で出てきた角の大きさが正答となってしまう場合はあるのか」という疑問が浮んできたので，以下この問題について考えていきたい。

## §2. 問題

これから考える問題を述べておく。

三角形のある1辺の長さを $l$ として，その長さ $l$ の辺に向かい合っている角の大きさを $\theta$ とする。長さの比が問題なので，各辺の長さを $l$ で割ることにより，長さ1の辺に向かい合っている角の大きさを $\theta$ として考える。

**[問題B]**　三角形の3辺の長さを1，$x$，$y$ として，長さが1である辺に向かい合っている角の大きさを $\theta$ とする。このとき，$\dfrac{\pi}{1+x+y} = \theta$ となる正の数の組 $x$，$y$ は存在するか。

例えば，$\theta = \dfrac{\pi}{3}$ の場合は $x = y = 1$ とすれば，[問題B]の正の数の組が存在することはすぐにわかる。これは正三角形という自明な場合である。

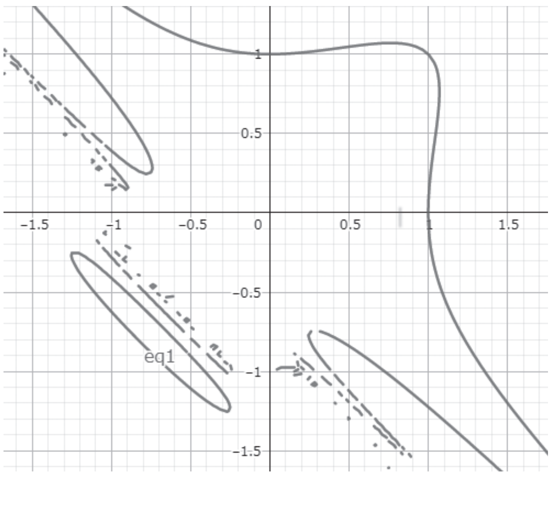
## §3. [問題B]の考察

[問題B]の設定の下で，$\cos\theta = \dfrac{x^2+y^2-1}{2xy}$ であるので，$\cos\dfrac{\pi}{1+x+y} = \dfrac{x^2+y^2-1}{2xy}$ を満たす正の数の組 $x$，$y$ が存在するか考える。つまり

$$2xy\cos\frac{\pi}{1+x+y} = x^2+y^2-1 \qquad \cdots\cdots(※)$$

を満たす正の数の組 $x$，$y$ が存在するか考える。

方程式(※)について，手計算で考察するのは自分にはかなり厳しいので，まず GeoGebra で方程式(※)の表す図形を図示させてみたところ，次の図のようになった。第2～4象限ではかなり複雑であるが，第1象限ではすっきりした形をしている。



ここで曲線(※)の概形から，曲線(※)と直線 $y=-x+k$ $(1<k\leqq 2)$ は第１象限に共有点をもつことがわかる。

そして，$y=-x+2$ のとき $\dfrac{\pi}{1+x+y}=\dfrac{\pi}{3}$，

$y=-x+1$ のとき $\dfrac{\pi}{1+x+y}=\dfrac{\pi}{2}$ である。

以上のことから $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす $\theta$ については，［問題Ｂ］の条件を満たす正の数の組 $x$，$y$ が存在することがわかる。

つまり，直線 $y=-x+k$ $(1<k\leqq 2)$ と曲線(※)の共有点の $x$ 座標，$y$ 座標が $\theta=\dfrac{\pi}{k+1}$ に対応する正の数の組である。なお，この正の数の組 $x$，$y$ は三角形の成立条件 $|x-y|<1<x+y$ を満たしていることに注意しておく。

## §4. 具体例

［問題Ｂ］の条件を満たす正の数の組 $x$，$y$ を具体的に求めたい。

まず，念のために $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のときを計算しておく。$y=-x+2$ を(※)に代入すると

$$2x(-x+2)\cos\frac{\pi}{3}=x^2+(-x+2)^2-1$$

であり，整理して $x^2-2x+1=0$ となる。この２次方程式は $x=1$ 以外の解をもたないので，$\dfrac{\pi}{3}$ に対応している正の数の組は $x=y=1$ の自明な場合しかない。

次に，$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $\cos\theta$ の値が具体的に計算できる角として，$\dfrac{2}{5}\pi$（つまり 72°）を考える。

そこで，$1+x+y=\dfrac{5}{2}$ として $y=-x+\dfrac{3}{2}$ を(※)に代入すると

$$2x\left(-x+\frac{3}{2}\right)\cos\frac{2}{5}\pi=x^2+\left(-x+\frac{3}{2}\right)^2-1$$

であり，$\cos\dfrac{2}{5}\pi=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ をさらに代入して整理すると $8x^2-12x+5(3-\sqrt{5})=0$ となる。この２次方程式を解いて

$$x=\frac{3\pm\sqrt{-21+10\sqrt{5}}}{4}$$

を得るので，この $x$ に対応する $y$ は

$$y=-x+\frac{3}{2}=-\frac{3\pm\sqrt{-21+10\sqrt{5}}}{4}+\frac{3}{2}$$
$$=\frac{3\mp\sqrt{-21+10\sqrt{5}}}{4}$$

となる。よって，次の［問題Ｃ］については，正しく計算しても，誤答した生徒のような有り得ない計算をしても，答えはどちらでも $\dfrac{2}{5}\pi$ となる。

**［問題Ｃ］** $\sin A:\sin B:\sin C=$ $\dfrac{3+\sqrt{-21+10\sqrt{5}}}{4}:1:\dfrac{3-\sqrt{-21+10\sqrt{5}}}{4}$ のとき，この三角形の２番目に大きい角の大きさを求めよ。

また，$\theta=\dfrac{5}{12}\pi$（つまり 75°）として同様に計算すると，次の［問題 C′］を得る。

**［問題 C′］** $\sin A:\sin B:\sin C=$ $\dfrac{7+\sqrt{-335-240\sqrt{2}+192\sqrt{3}+144\sqrt{6}}}{10}:1$ $:\dfrac{7-\sqrt{-335-240\sqrt{2}+192\sqrt{3}+144\sqrt{6}}}{10}$ のとき，この三角形の２番目に大きい角の大きさを求めよ。

(これらの具体例の計算が正しいことの確認に wolframalpha を用いた)。

## §5. おわりに

§4 で自明でない具体例を２組求めたが，［問題Ｃ］については，$\cos\dfrac{2}{5}\pi$ の値を認識させる意味でも，定期試験に出題するのは面白そうである。

生徒の誤答がなければ，曲線(※)について考える機会はまず訪れなかったはずなので，誤答した生徒には感謝したい。しかし，これからはこのような誤答を繰り返さないように指導していかなければならないと思っている。


**《参考文献》**

〔１〕 GeoGebra
https://www.geogebra.org/graphing

〔２〕 wolframalpha
https://ja.wolframalpha.com/



(神奈川県立生田高等学校)