ジャグリングと数学

三津山（みつやま） 央（なかば）

§1. はじめに

サーカスや大道芸で見られるジャグリング，中でも手に持った複数個の道具を連続的に投げるパフォーマンスである「トスジャグリング」には，投げ方のパターンが多数あり，それらが数学的に分析されている。ここでは，投げ方のパターンを有限非負整数列で表す「サイトスワップ」と呼ばれる記法とその数学的性質についてまとめ，考察していきたい。扱う内容は，数列はもちろん，整数や場合の数の考え方にも関連があり，一風変わった高校数学の題材として扱うことが可能である。さらには，数学者がサイトスワップについての論文を出すなど，高度な数学にもつながっているようであり，興味深い。

以下「ジャグリング」という語は「トスジャグリング」を指すものとする。

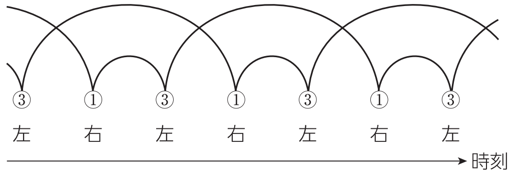
§2. ダイヤグラムとサイトスワップ

ここからの議論では投げる道具の種類を問わないが，便宜的にボールとする。次の条件をともに満たすようにジャグリングすることを考える。

⑴ 右手左手交互に一定の時間間隔で投げる。
⑵ 片手で複数のボールを同時に投げること，キャッチすることはできない。

まず，以上の条件を満たしている投げ方の例をダイヤグラムで示す。例 1 は，2 個のボールで行うお手玉，つまり左手のボールを右上に投げている間に右手のボールを素早く左手に投げ渡すパターンを表している。○は投げる各タイミング（**拍**と呼ぶ）を，上部の弧はボールの推移を，○の中の数字は投げ上げられてからキャッチされるまでの拍数を表している。わかりにくければ，厳密ではないが「数字は投げる高さを表す」とイメージしてもよい。なお，現実的には，ボールをキャッチしてから投げるまで手に保持する時間が若干あるが，簡単のためにダイヤグラムでは省略し，「キャッチしたボールをすぐ投げる」ような図にした。また，投げとキャッチのタイミングのみを考えるものとし，パフォーマンス（体の後ろから投げる，足の下から投げるなど）は考えない。ボールの個数については§4 で考察する。

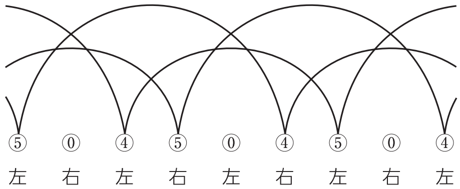
例 1



これ以後時刻の軸は右向きを正として省略する。

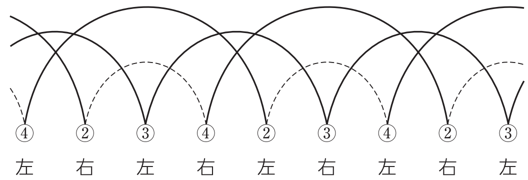
例 2 は，3 個のボールで行うジャグリングのひとつである。実際のパフォーマンスをイメージするのは難しいので，上の条件⑴⑵を満たすことのみ確認できればよい。⓪の拍ではその手でキャッチも投げもしていない。条件⑴があるので，片手から連続で投げたい場合はこのように「何もしない拍」をはさむ。また，奇数の拍で投げられたボールは投げた側と逆の手に，偶数の拍で投げられたボールは投げた側の手にキャッチされることがわかる。

例 2



例 3 では②の拍のみボールの推移を点線で示した。実は，②のみ例外的に「ボールを投げずに 2 拍分保持する動作」を表す。これは，②が「投げた方と同じ側の手でキャッチする最も低い（厳密には刻む拍数が最小の）投げ方」に当たるためである。ただし，今後の議論の中では，②の拍も他の拍と同様「2 拍分投げる」と解釈した方が整然とする。

例 3



こうしたダイヤグラムの各拍の数字を，繰り返される最短の長さ（これを**周期**と呼ぶ）だけ抜き出して得られる数列を**サイトスワップ**という。例 1 のジャグリングのサイトスワップは「3，1」（周期は 2），例 2 は「5，0，4」（周期は 3），例 3 は「4，2，3」（周期は 3）となる。繰り返しの抜き出し方は問わない。例えば例 2 を「4，5，0」や「0，4，5」と表してもよい。このように，抜き出し方だけが異なる本質的には同じサイトスワップたちを互いに**サイクリックシフト**と呼ぶ。

ちなみに，サイトスワップには各項間のカンマを省略して表記したり，10 以上の数 10，11，12，… を a，b，c，…とアルファベット表記したりする慣例もあるが，高校数学の表記に合わせ，今回これらの表記は用いない。また，投げる手は左右交互であれば「…，左，右，左，右，…」でも「…，右，左，右，左…」でも議論に影響しないので，これ以後ダイヤグラム中の左右の表記は省略する。

§3. ジャグリング可能性

§2 では，ダイヤグラムからサイトスワップを作る手順を述べた。このセクションでは，まず数列を与え，それがサイトスワップとして有効である（**ジャグリング可能**である）か判定する方法を考えたい。

> **定理**　**（有限非負整数列のジャグリング可能性）**
>
> 有限非負数列 a_1，a_2，…，a_n がジャグリング可能であることは，任意の相異なる
>
> $1 \leqq i$，$j \leqq n$ で
>
> $$a_i + i \not\equiv a_j + j \pmod{n}$$
>
> が成り立つことと同値である。

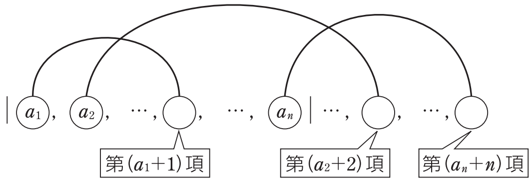
証明

与えられた数列 $\{a_n\}$：a_1，a_2，…，a_n を繰り返して，任意の i について $a_i = a_{i+n} = a_{i+2n} = \cdots$ となる数列を考え，n 項ごと区切った群数列にする。

$$|a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\,|\,a_{n+1},\ a_{n+2},\ \cdots,\ a_{2n}\,|\cdots$$

このとき，項（拍）a_1，a_2，…，a_n で投げられたボールがキャッチされる項は，それぞれ第 (a_1+1) 項，第 (a_2+2) 項，…，第 (a_n+n) 項である。

ダイヤグラムの一例



これらのキャッチされる項が「各群の何番目か」を求めるには，次のようにそれぞれを n で割った余りを求めればよい。（ただし，各群の n 番目になる場合は余りが 0 になる）

$$a_1+1,\ a_2+2,\ \cdots,\ a_n+n \pmod{n}$$

これらがすべて異なれば§2 で述べた条件(2)を満たす（片手に複数のボールが同時に落ちてこない）ので，ジャグリング可能となる。逆に，ジャグリング可能な数列は当然これらの余りがすべて異なる。■

例 4

数列 $\{a_n\}$：1，2，3，4，5
a_i+i：2，4，6，8，10
mod 5：2，4，1，3，0

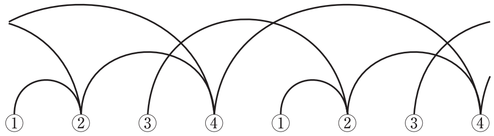
この 5 つの余りがすべて異なるので $\{a_n\}$ はジャグリング可能である。

例 5

数列 $\{a_n\}$：1，2，3，4
a_i+i：2，4，6，8
mod 4：2，0，2，0

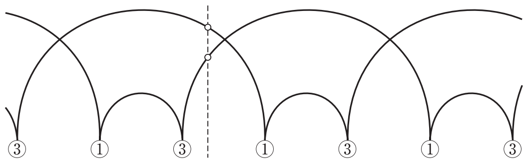
この 4 つの余りに重複があるので $\{a_n\}$ はジャグリング可能でない。

例 5 の数列をもとに無理やり描いた次のダイヤグラムで見ると②と④の拍で同時に 2 個のボールをキャッチしてしまうことがわかりやすい。さらに言えば，①と③の拍では「どこからも飛んできていないボール」を投げる状態になってしまっている。



§4. ボールの個数

あるジャグリングのダイヤグラムが与えられた場合，任意の時刻を横切る弧の個数を数えれば，ボールの個数がわかる。例えば，次のダイヤグラムでは，2 個のボールが使われていることがわかる。

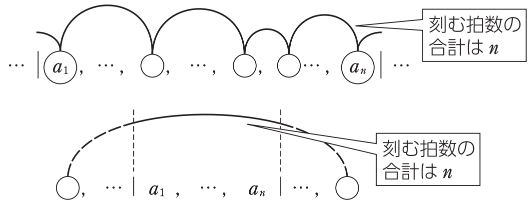


では，初めにサイトスワップが与えられた場合，ダイヤグラムを描くことなくボールの個数を求めるにはどうすればよいか。次の定理がある。

> **定理**　(ボールの個数)
> 　サイトスワップ $\{a_n\}$ をジャグリングするときに使うボールの個数 b は $\{a_n\}$ の各項の平均値に等しい。
> すなわち　$b=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$

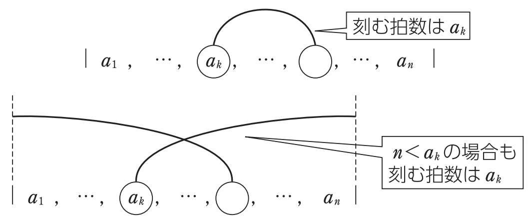
証明

１個のボールだけを追って見た場合，そのボールがサイトスワップ１周期で刻む拍数の合計は n である。例えば,



よって，サイトスワップ１周期中で b 個すべてのボールが刻む拍数の合計を l とすると　$l=nb$　…①

また，項 a_k がダイヤグラム１周期中で刻む拍数は，定義より a_k である。例えば,



上で考えた l は１周期中の各項が刻む拍数の総和でもあるので　$l=\sum_{k=1}^{n}a_k$　…②

①，②より $nb=\sum_{k=1}^{n}a_k$ なので　$b=\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$　■

また，ジャグリングに用いるボールの個数は非負整数なので次の性質がすぐに導かれる。

> **定理**　(ジャグリング可能であるための必要条件)
> 　数列 $\{a_n\}$ がジャグリング可能ならば $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$ は非負整数である。

この逆は成り立たない。例えば，数列 3，2，1 は各項の平均値が 2 で非負整数だが，ジャグリング可能でない。

§5. サイトスワップの個数

次に，サイトスワップの個数について考える。数え上げに何も制限を設けない場合，サイトスワップは無数に存在する。例えば項が１つだけの非負整数列は(現実のパフォーマンス可否はともかく)ジャグリング可能であり，無数に存在することは自明である。そこで，ボールの個数と周期に制限を設けると次の定理が成り立つ。

> **定理**　(サイトスワップの個数)
> 　ボールの個数が b 個で，n の約数を周期とするサイトスワップの個数 $M(b,\ n)$ は，サイクリックシフトをそれぞれ区別して数え上げると
> 　$M(b,\ n)=(b+1)^n-b^n$

注意　(数え上げの冗長性)

この定理では，n を周期とするサイトスワップだけでなく，n の約数を周期とするサイトスワップをすべて数え上げている。例えば $n=4$ のとき「3，1，3，1」や「3，3，3，3」など(並んでいる数字は 4 つであるが)周期が 2 や 1 であるものも数え上げている。また，サイクリックシフトをそれぞれ区別して数え上げている。例えば「5，0，4」と「4，5，0」と「0，4，5」は 3 個と数えている。

証明

n 拍分のダイヤグラムを作ることを考える。ひとつの拍 a_k に注目すると，その直前には必ず b 個のボールが浮いている。(§2 の例 3 で述べたように②の拍は本来「保持」の動作だが「２拍分投げる」と解釈する。)§2 のはじめに設けた条件(2)より，同時に投げられたボールは存在しないから，これら b 個のボールは滞空時間の少ない順にボール 1，ボール 2，…，ボール b と区別できる。言い換えれば，1 番最近投げ上げられた方からボール 1，ボール 2,

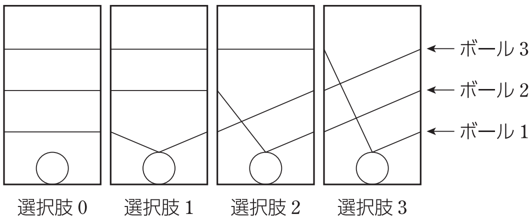
…, ボール b と名付ける。このとき, 拍 a_k で採れる選択肢は次の 0 から b の $b+1$ 種類である。

選択肢 0 ：a_k ではキャッチも投げもしない
選択肢 1 ：ボール 1 をキャッチしてすぐ投げる
選択肢 2 ：ボール 2 をキャッチしてすぐ投げる
：
選択肢 b ：ボール b をキャッチしてすぐ投げる

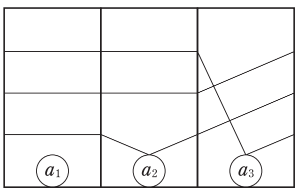
ここで拍 a_1, a_2, …, a_n それぞれにいずれかの選択肢を重複を許して割り当てればジャグリング可能な n 拍分のダイヤグラムすべてを過不足なく構成(※)できる。ただし, 選択肢 l, $l+1$, …, b (l は $1 \leqq l \leqq b$ を満たす整数)がすべて使われない場合(※※), ジャグリングされているボールは $(l-1)$ 個になる。よって, ボールの個数が <u>**b 個以下**</u>で, n の約数を周期とするサイトスワップの個数は $(b+1)^n$ となる。

したがって, ボールの個数が<u>**ちょうど b 個**</u>で, n の約数を周期とするサイトスワップの個数
$M(b,\ n)$ は, $M(b,\ n)=(b+1)^n-b^n$ となる。■

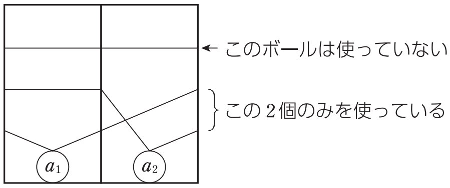
なお, この証明の(※)は次のようなカードを用いて視覚的にも理解できる。例えば $b=3$ のとき選択肢 0 ～ 3 は次の 4 枚のカードに対応付けられる。



これらを重複を許して n 枚並べれば 1 つのダイヤグラムができる。例えば次のように 3 枚並べるとサイトスワップ 0, 4, 2 で表されるジャグリングのダイヤグラムができる。



また(※※)については, 例えば選択肢 3 のカードを使わずに次のように並べると「1 番上のボールが永久に落ちてこない」図, つまり 2 個のボールで行うジャグリングのダイヤグラムができることから理解できる。このサイトスワップは 3, 1 である。



さらに, 選択肢 0 のカードのみ用いる並べ方を考えると, ボールを 1 つも使わないジャグリング(何も持たず何もしない)になる。サイトスワップは「 0 」で, これも(※※)で数え上げる個数に含まれる。

ところで, 前の **注意** で述べた通り, この $M(b,\ n)$ には数え上げる内容に冗長性があった。最後にこの冗長性を取り除いた数え上げの方法を考察する。

定理 (サイトスワップの個数)

ボールの個数が b 個で, n を周期とするサイトスワップの個数 $N(b,\ n)$ は, サイクリックシフトをそれぞれ区別しないで数え上げると

$$N(b,\ n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\{(b+1)^d-b^d\}$$

ただし, $\sum_{d|n}$ は n のすべての約数 d について和をとるという意味である。また, 関数 $\mu(n)$ は**メビウス関数**と呼ばれ, 自然数上で次のように定義される。

$$\mu(n)=\begin{cases} 1 & (n=1\text{のとき}) \\ 0 & (n\text{が 1 以外の平方数の倍数のとき}) \\ (-1)^k & (n\text{が異なる }k\text{ 個の素数の積のとき}) \end{cases}$$

注意 (取り除かれた冗長性)

この定理では, 周期がちょうど n であるもののみを数えている。また, サイクリックシフトをそれぞれ区別せずに 1 つのものとして数え上げている。例えば「5, 0, 4」と「4, 5, 0」と「0, 4, 5」はまとめて 1 個と数えている。

証明

周期 d のサイトスワップには d 個のサイクリックシフトがある。また, $M(b,\ n)$ は n の約数を周期とするサイトスワップを(サイクリックシフトを区別して)すべて数え上げている。これらのことから, $M(b,\ n)$ と $N(b,\ n)$ には次の関係が成り立つ。

$$M(b,\ n)=\sum_{d|n}\{d\times N(b,\ d)\}$$

つまり

$$(b+1)^n-b^n=\sum_{d|n}\{d\times N(b,\ d)\}$$

ここでメビウスの反転公式(後述)を用いれば

$$n\times N(b,\ n)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\{(b+1)^d-b^d\}$$

すなわち

$$N(b,\ n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\{(b+1)^d-b^d\} \quad ■$$

補題 (メビウス関数の性質)

2以上の自然数nについて $\sum_{d|n}\mu(d)=0$

証明

$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_k^{e_k}$ と素因数分解されるとする。

和 $\sum_{d|n}\mu(d)$ において,dはnの約数(つまりnの素因数をいくつか掛け合わせたもの)をすべて動く。ただし,dが同じ素因数を2つ以上含むと $\mu(d)=0$ となるので,あらかじめそれを除いて和を計算すると

$\sum_{d|n}\mu(d)$

$=$(dに素因数を含まないもの)

$+$(dが素因数をちょうど1個含むもの)

$+$(dが素因数をちょうど2個含むもの)

$+\cdots$

$+$(dが素因数をちょうどk個含むもの)

$=\mu(1)$ 値は1

$+\{\mu(p_1)+\mu(p_2)+\cdots+\mu(p_k)\}$ 値はすべて -1

$+\{\mu(p_1p_2)+\mu(p_1p_3)+\cdots+\mu(p_{k-1}p_k)\}$ 値はすべて1

$+\cdots$

$+\{\mu(p_1p_2\cdots p_k)\}$ 値は $(-1)^k$

$=1-{}_kC_1+{}_kC_2-\cdots+(-1)^k{}_kC_k$

$=(1-1)^k$ ($\because$ 二項定理)

$=0$ ■

公式 (メビウスの反転公式)

$f(n)$,$g(n)$を自然数から実数への関数とするとき

$$g(n)=\sum_{d|n}f(d) \Longrightarrow f(n)=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)$$

証明

$$\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)$$

$$=\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)\sum_{d'|d}f(d') \quad (\because\ g(n)=\sum_{d|n}f(d))$$

$$=\sum_{d'|d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)f(d')$$

ここでd'を固定して考えると$d'|d|n$より $\frac{n}{d}$ は $\frac{n}{d'}$ の約数全体を動く。したがって $\frac{n}{d}=t$ とすると

$$\sum_{d'|n}\left\{f(d')\sum_{t|\frac{n}{d'}}\mu(t)\right\}$$

$t>1$ すなわち $d'\neq n$ のとき補題より括弧内の和は0になり,$d'=n$ のときの項 $f(n)\mu(1)$ のみが残る。

したがって,$\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)g(d)=f(n)$ ■

例6

ボール4個,周期3のサイトスワップの個数は

$$N(4,\ 3)=\frac{1}{3}\sum_{d|3}\mu\left(\frac{3}{d}\right)\{(4+1)^d-4^d\}$$

$$=\frac{1}{3}\{\mu(3)(5^1-4^1)+\mu(1)(5^3-4^3)\}$$

$$=\frac{1}{3}\{(-1)\times1+1\times61\}$$

$$=20$$

ちなみに20個すべてを列挙すると次の通りである。

12, 0, 0/9, 3, 0/9, 0, 3/6, 6, 0/6, 3, 3/10, 1, 1/7, 4, 1/7, 1, 4/8, 0, 4/8, 3, 1/11, 0, 1/5, 6, 1/5, 3, 4/5, 0, 7/2, 9, 1/2, 6, 4/2, 3, 7/2, 0, 10/8, 2, 2/5, 5, 2

§6. 最後に

今回§2の条件(1)(2)を満たすジャグリングのみ扱ってきたが,両手同時に投げたり,片手で複数のボールを同時にキャッチしたりするジャグリングとその数学的分析方法も開発されているようである。

また,サイトスワップをすべてジャグリングと関連付けて述べてきたが,「任意の相違なる $1\leqq i$, $j\leqq n$ について $a_i+i\not\equiv a_j+j \pmod n$ が成り立つ有限非負数列 a_1, a_2, …, a_n」という表現をすれば純粋な数学の題材にとり入れることも可能であろう。

《参考文献》

〔1〕 Burkard Polster, Mathematics of Juggling, 2003

(茨城県立総和工業高等学校)