リンク機構の回転の速さを利用した定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{a+b\cos t}$ （$a>b>0$）の計算

玉井（たまい）　克樹（かつき）

§1．2021 年の神戸大学の入試問題より

2021 年の神戸大学の入試で次の問題が出題された。(〔1〕にも掲載されている。)

問題A　座標平面上を運動する点 P$(x,\ y)$ の時刻 t における座標が

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\ y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t}$$

であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　点Pと原点Oとの距離を求めよ。

(2)　点Pの時刻 t における速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と速さ $|\vec{v}|$ を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{5+4\cos t}$ を求めよ。

一般に，$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{a+b\cos t}$ $(a>b>0)$ のタイプの定積分の計算は，広義積分や複素積分の練習問題として大学の微積分の講義で扱われるようなものであり，高校生では扱いにくい問題である。

本問は，点Pの軌跡が半円であることと被積分関数がPの速さの実数倍になっていることに気が付かせて，その弧長から最後の定積分の値が求められるようになっている。あまり類を見ない入試問題で，面白い問題であった。高校生で弧長が既知なものは線分と円弧くらいであろうから，簡単には類題が作れなさそうである。どのようにすればこのような問題が作成できるのか興味を持ち，一般に，$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{dt}{a+b\cos t}$ $(a>b>0)$ の計算が，本問のようにできるかどうかを考察してみた。

§2．問題Aの背景

まず，式

$$x=\frac{4+5\cos t}{5+4\cos t},\ y=\frac{3\sin t}{5+4\cos t} \quad \cdots\cdots①$$

がどのように作られたものなのかを考えることにした。同じ数式がどこかに出ていないか調べてみたところ，数研通信(〔2〕)のおもちゃの蒸気機関車の問題でよく似た数式を発見することができたため，すこし設定を変えて次の計算を行ってみることにした。

座標平面において，単位円を C，中心が $(2,\ 0)$ で半径が 1 の円を C' とする。円 C' 上を時刻 0 で $(3,\ 0)$ を出発し，時計回りに角速度の大きさ 1 で移動する動点Qがある。さらに点Pは，PQ 間の距離が 2 で一定となるように C 上を移動する動点とする。このときの点Pの移動の方法として，Qと同じ向き(時計回り)で動くものと，反対向き(反時計回り)で動くものの 2 通りが考えられる。この後者の点Pの時刻 t での座標 $(x,\ y)$ を計算すると，式①と同じものになった。(図 1 参照)

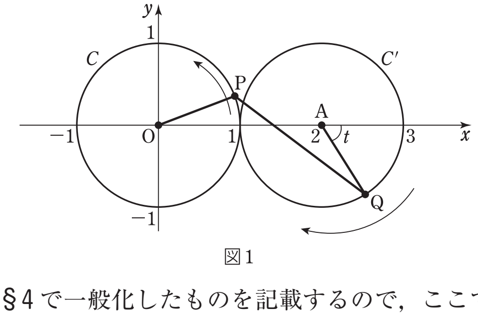

図1

§4 で一般化したものを記載するので，ここでは説明は省略する。問題Aがこのように作られたものかどうかはわからないが，この設定を変えることで問題Aの類題が作成できると考えた。

§3. 機械工学におけるリンク機構との関連

一般化の前に，§2の点P，Qの動きをイメージしやすくするためのモデルを考えよう。下の図2，図3は，4本の棒の両端を接続して平面内を動くようにした仕組みである。ここで，OP＝AQ，OA＝PQ（>OP）とし，O，Aは固定されているものとする。このとき，Qを動かすと，Pも動く。図2のように平行四辺形をなすようにしておけば，PはQと同じ向きに同じ速さで回るのは明らかだろう。図3のように，OAとPQが交わるようにすると，Qの回転方向と反対にPは回る。

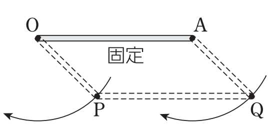

図2

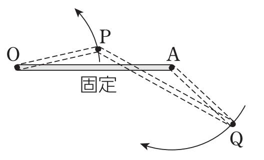

図3

機械工学では，4本の棒(リンク)の両端を接続した仕組みのことを**四節リンク機構**という。図2のリンク機構は平行四辺形ができるため，**平行リンク機構**(英語ではparallel linkage)と呼ばれ，電車のパンタグラフなどに応用されている。それに対し，図3のリンク機構は英語ではantiparallelogram linkageと呼ぶそうである。適当な日本語訳が見つからなかったので，ここでは**交差したリンク機構**と呼ぶことにする。§2で説明した動点P，Qの配置は，OP＝AQ＝1，OA＝PQ＝2の場合の交差したリンク機構に対応している。

§4. 問題Aの一般化

§3の交差したリンク機構において，2本の棒の長さの比を 1：2 から 1：k に一般化することで，問題Aの類題の作成を試みた。

kを $k>1$ を満たす定数とする。単位円をC，中心が$(k,\ 0)$で半径が1の円をC'とする。円C'上を時刻0で$(k+1,\ 0)$を出発し，時計回りに角速度の大きさ1で移動する動点をQとする。さらに点Pは，PQ間の距離がkで一定となるようにC上を反時計回りに移動する動点とする。(図4参照)このとき，点Pの時刻tでの座標$(x,\ y)$を計算してみた。

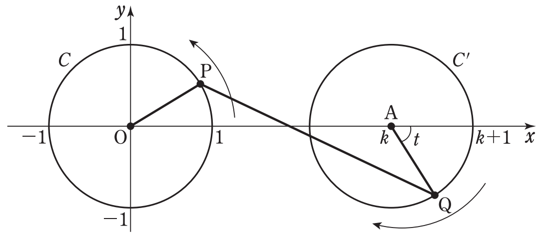

図4

時刻tでのQの座標は$(k+\cos t,\ -\sin t)$と表され，PQ＝k であることから

$$\{x-(k+\cos t)\}^2+(y+\sin t)^2=k^2$$

$$x^2-2(k+\cos t)x+y^2+2(\sin t)y+2k\cos t+1=0$$

P$(x,\ y)$はC上を動くので，$x^2+y^2=1$ であるから $-2(k+\cos t)x+2(\sin t)y+2k\cos t+2=0$

$k+\cos t \geqq k-1>0$ より

$$x=\frac{(\sin t)y+k\cos t+1}{k+\cos t} \quad \cdots\cdots②$$

$x^2+y^2=1$ に代入して

$$\left\{\frac{(\sin t)y+k\cos t+1}{k+\cos t}\right\}^2+y^2=1$$

$$\{(\sin t)y+k\cos t+1\}^2+(k+\cos t)^2y^2=(k+\cos t)^2$$

$$\{\sin^2 t+(k+\cos t)^2\}y^2+2\sin t(k\cos t+1)y$$
$$+(k\cos t+1)^2-(k+\cos t)^2=0$$

$$\{(k^2+1)+2k\cos t\}y^2+2\sin t(k\cos t+1)y$$
$$+k^2\cos^2 t+1-k^2-\cos^2 t=0$$

$$\{(k^2+1)+2k\cos t\}y^2+2\sin t(k\cos t+1)y$$
$$-(k^2-1)\sin^2 t=0$$

$$(y+\sin t)[\{(k^2+1)+2k\cos t\}y-(k^2-1)\sin t]=0$$

$(k^2+1)+2k\cos t \geqq (k^2+1)-2k=(k-1)^2>0$ であるから

$$y=-\sin t,\ \frac{(k^2-1)\sin t}{(k^2+1)+2k\cos t} \quad \cdots\cdots③$$

③の2つの解のうち，$y=-\sin t$（このとき，$x=\cos t$）の方が§3の平行リンク機構に，もう一方が§3の交差したリンク機構に対応する。

$y=\dfrac{(k^2-1)\sin t}{(k^2+1)+2k\cos t}$ を，②に代入すると

$$x=\frac{(k^2-1)\sin^2 t+(k\cos t+1)\{(k^2+1)+2k\cos t\}}{(k+\cos t)\{(k^2+1)+2k\cos t\}}$$

$$=\frac{(k^2-1)(1-\cos^2 t)+(k\cos t+1)\{(k^2+1)+2k\cos t\}}{(k+\cos t)\{(k^2+1)+2k\cos t\}}$$

$$=\frac{2k^2+(k^3+3k)\cos t+(k^2+1)\cos^2 t}{(k+\cos t)\{(k^2+1)+2k\cos t\}}$$

$$=\frac{(k+\cos t)\{2k+(k^2+1)\cos t\}}{(k+\cos t)\{(k^2+1)+2k\cos t\}}$$

$$=\frac{2k+(k^2+1)\cos t}{(k^2+1)+2k\cos t}$$

したがって，点Pの時刻 t での座標 $(x,\ y)$ は

$$x=\frac{2k+(k^2+1)\cos t}{(k^2+1)+2k\cos t},\quad y=\frac{(k^2-1)\sin t}{(k^2+1)+2k\cos t} \quad \cdots\cdots④$$

と表される。④に $k=2$ を代入したものが，§2の式①である。

これにて，問題Aの類題が完成した。

問題B（問題Aの一般化） k を $k>1$ を満たす定数とする。座標平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t における座標が

$$x=\frac{2k+(k^2+1)\cos t}{(k^2+1)+2k\cos t},\quad y=\frac{(k^2-1)\sin t}{(k^2+1)+2k\cos t}$$

であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 点Pと原点Oとの距離を求めよ。

(2) 点Pの時刻 t における速度 $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と速さ $|\vec{v}|$ を，それぞれ $k,\ t$ を用いて表せ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{(k^2+1)+2k\cos t}$ を，k を用いて表せ。

§5. 問題Bの解答

解答も記載しておく。$k=2$ とすると問題Aの解答にもなる。

【解答】

(1) x^2+y^2

$$=\frac{\{2k+(k^2+1)\cos t\}^2+\{(k^2-1)\sin t\}^2}{\{(k^2+1)+2k\cos t\}^2}$$

$$=\frac{4k^2+4k(k^2+1)\cos t+(k^2+1)^2\cos^2 t+(k^2-1)^2\sin^2 t}{\{(k^2+1)+2k\cos t\}^2}$$

$$=\frac{4k^2+4k(k^2+1)\cos t+4k^2\cos^2 t+(k^2-1)^2}{\{(k^2+1)+2k\cos t\}^2}$$

$$=\frac{(k^2+1)^2+4k(k^2+1)\cos t+4k^2\cos^2 t}{\{(k^2+1)+2k\cos t\}^2}$$

$$=\frac{\{(k^2+1)+2k\cos t\}^2}{\{(k^2+1)+2k\cos t\}^2}$$

$$=1 \quad \cdots（答）$$

(2) $\dfrac{dx}{dt}$

$$=\frac{-(k^2+1)\sin t\cdot\{(k^2+1)+2k\cos t\}-\{2k+(k^2+1)\cos t\}\cdot(-2k\sin t)}{\{(k^2+1)+2k\cos t\}^2}$$

$$=\frac{-(k^2+1)^2\sin t+4k^2\sin t}{\{(k^2+1)+2k\cos t\}^2}$$

$$=\frac{-(k^2-1)^2\sin t}{\{(k^2+1)+2k\cos t\}^2}$$

$\dfrac{dy}{dt}$

$$=\frac{(k^2-1)\cos t\cdot\{(k^2+1)+2k\cos t\}-(k^2-1)\sin t\cdot(-2k\sin t)}{\{(k^2+1)+2k\cos t\}^2}$$

$$=\frac{(k^2-1)\{(k^2+1)\cos t+2k\}}{\{(k^2+1)+2k\cos t\}^2}$$

よって

$$\vec{v}=\left(\frac{-(k^2-1)^2\sin t}{\{(k^2+1)+2k\cos t\}^2},\ \frac{(k^2-1)\{(k^2+1)\cos t+2k\}}{\{(k^2+1)+2k\cos t\}^2}\right) \quad \cdots（答）$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-(k^2-1)}{(k^2+1)+2k\cos t}y,$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{k^2-1}{(k^2+1)+2k\cos t}x$$

に注意すると

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left\{\frac{-(k^2-1)}{(k^2+1)+2k\cos t}y\right\}^2+\left\{\frac{k^2-1}{(k^2+1)+2k\cos t}x\right\}^2}$$

$$=\left|\frac{k^2-1}{(k^2+1)+2k\cos t}\right|\sqrt{y^2+x^2}$$

ここで，$x^2+y^2=1$ で，$k^2-1>0$，

$(k^2+1)+2k\cos t\geqq(k^2+1)-2k=(k-1)^2>0$

であるから

$$|\vec{v}|=\frac{k^2-1}{(k^2+1)+2k\cos t} \quad \cdots\cdots⑤ \quad \cdots（答）$$

(3) $0<t<\pi$ において，常に

$$y=\frac{(k^2-1)\sin t}{(k^2+1)+2k\cos t}>0,$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-(k^2-1)^2\sin t}{\{(k^2+1)+2k\cos t\}^2}<0$$

で，$t=0$ のときは $\mathrm{P}(1,\ 0)$，$t=\pi$ のときは $\mathrm{P}(-1,\ 0)$ であるため，(1)の結果と合わせると，点Pは単位円の $y\geqq0$ の部分を $(1,\ 0)$ から $(-1,\ 0)$ に向かって引き返すことなく移動する。

$\displaystyle\int_0^\pi|\vec{v}|\,dt$ は，$t=0$ から $t=\pi$ までの点Pの道のりを表すから，半径1の円周の長さの半分の π となる。よって，⑤より

$$\int_0^\pi\frac{k^2-1}{(k^2+1)+2k\cos t}dt=\pi$$

$k^2-1>0$ であるから

$$\int_0^\pi\frac{dt}{(k^2+1)+2k\cos t}=\frac{\pi}{k^2-1} \quad \cdots\cdots⑥ \quad \cdots（答）$$

§6. 幾何による回転の速さの計算

§3の交差したリンク機構において，点Qを等速で回転させるとき，点Pの回転の速さがどのように表されるかを，動く角の関係式から直接求めてみよう。

棒の長さを $OP=AQ=1$，$OA=PQ=k$ ($k>1$) とし，点Qの角速度の大きさを1とする。時刻 t ($0<t<\pi$) において，点Qが t だけ回転する。このとき，$\angle AOQ=\alpha$，$\angle AOP=\theta$ とおく。(図5参照)

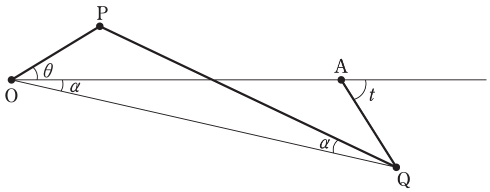

図5

$\triangle AOQ$ と $\triangle PQO$ は3組の辺がそれぞれ等しいため合同である。よって，

$$\angle PQO=\angle AOQ=\alpha$$
$$\angle OPQ=\angle QAO=\pi-t$$

であり，$\triangle POQ$ の内角の和から，

$$(\pi-t)+\theta+\alpha+\alpha=\pi$$

となり，$\alpha=\dfrac{t-\theta}{2}$ を得る。

次に，$\triangle POQ$ についての正弦定理より

$$\frac{PQ}{\sin\angle POQ}=\frac{OP}{\sin\angle OQP}$$

$$\frac{k}{\sin\left(\theta+\dfrac{t-\theta}{2}\right)}=\frac{1}{\sin\dfrac{t-\theta}{2}}$$

$$k\sin\frac{t-\theta}{2}=\sin\frac{t+\theta}{2}$$

$$k\left(\sin\frac{t}{2}\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{t}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\sin\frac{t}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{t}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

$$(k+1)\cos\frac{t}{2}\sin\frac{\theta}{2}=(k-1)\sin\frac{t}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\tan\frac{t}{2} \qquad \cdots\cdots⑦$$

両辺を t で微分して

$$\frac{1}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{t}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\left(1+\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{k-1}{k+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{t}{2}}$$

⑦より

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{\dfrac{k-1}{k+1}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{t}{2}}}{1+\left(\dfrac{k-1}{k+1}\right)^2\cdot\tan^2\dfrac{t}{2}}$$

$$=\frac{\dfrac{k-1}{k+1}}{\cos^2\dfrac{t}{2}+\left(\dfrac{k-1}{k+1}\right)^2\cdot\sin^2\dfrac{t}{2}}$$

$$=\frac{\dfrac{k-1}{k+1}}{\dfrac{1+\cos t}{2}+\left(\dfrac{k-1}{k+1}\right)^2\cdot\dfrac{1-\cos t}{2}}$$

$$=\frac{2(k-1)(k+1)}{(k+1)^2(1+\cos t)+(k-1)^2(1-\cos t)}$$

$$=\frac{2(k^2-1)}{2k^2+2+4k\cos t}$$

$$=\frac{k^2-1}{(k^2+1)+2k\cos t}$$

証明は易しいので省くが，円運動の速さは半径と角速度の大きさの積で表されるので，点Pの速さは

$$|\vec{v}|=1\cdot\left|\frac{d\theta}{dt}\right|=\frac{k^2-1}{(k^2+1)+2k\cos t}$$

となる。これは⑤と一致する。点Pの速さを求めるだけなら，この計算の方が§4，§5の計算よりも簡単である。これを $t=0$ から $t=\pi$ まで積分すれば⑥を得る。

§7. 定積分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{a+b\cos t}$ の計算への応用

最後に応用として，定積分

$$I=\int_0^\pi\frac{dt}{a+b\cos t} \qquad (a>b>0)$$

を，交差したリンク機構の棒の長さの比の k をうまく見つけることで計算してみよう。

点Pの回転の速さを積分して得られた結果⑥より，k を $k>1$ を満たす定数とすると，

$$\int_0^\pi\frac{dt}{\dfrac{k^2+1}{2k}+\cos t}=\frac{\pi}{\dfrac{k^2-1}{2k}} \qquad \cdots\cdots⑧$$

が成り立つ。一方，定積分 I は

$$I=\frac{1}{b}\int_0^\pi\frac{dt}{\dfrac{a}{b}+\cos t}$$

と表されるから，

$$\frac{a}{b}=\frac{k^2+1}{2k}\left(=\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)\right)$$

となるようにkを定めると,

$$k=\frac{a}{b}+\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}$$

となる。このkを用いると,

$$\frac{1}{k}=\frac{a}{b}-\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}$$

であるから,

$$I=\frac{1}{b}\int_0^{\pi}\frac{dt}{\frac{k^2+1}{2k}+\cos t}=\frac{1}{b}\cdot\frac{\pi}{\frac{k^2-1}{2k}} \quad (⑧より)$$

$$=\frac{1}{b}\cdot\frac{\pi}{\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{k}\right)}=\frac{1}{b}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

と求めることができた。

《参考文献》

〔1〕 2021 数学Ⅲ入試問題集　数研出版

〔2〕 外処直哉「おもちゃの蒸気機関車」 数研通信 No.31

（京都府　東山中学・高等学校）