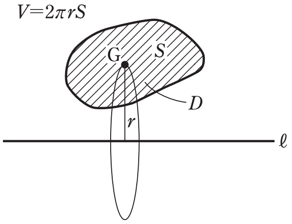
# パップス・ギュルダンの定理の証明

森島(もりしま)　充(みつる)

## §1. はじめに

パップス・ギュルダンの定理の証明を考えます。




定理の内容を確認すると，次の通りです。

「3次元空間の直線 $\ell$ を含む平面上に領域 $D$ があり，$D$ が直線 $\ell$ をまたがないとき，$D$ を直線 $\ell$ の周りに回転させてできる立体の体積を $V$，$D$ の重心 $G$ と直線 $\ell$ の距離を $r$，$D$ の面積を $S$ とすると，

$$V=2\pi rS$$

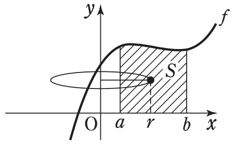
である。」

ロピタルの定理と並んで「高校生が使ってはいけない定理」として有名です。私が高校生だったときにもそう言われました。もっとも，ロピタルの定理は検算手段として有効ですが，パップス・ギュルダンの定理はそもそも使える問題がめったにありません。

しかし証明を考えることはとても勉強になったので，まとめてみることにしました。

## §2. 証明(上)／高校数学編

右の図の場合で考えます。ただし，
$0\leqq a<b$ とし，
$a\leqq x\leqq b$ で $f(x)>0$
とします。




まず体積 $V$ は

$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

ですが，これはさまざまな説明があって，各先生方の考えがあると思いますので，ここでは省略します。

面積は，

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

です。

図の場合，$r$ が重心の $x$ 座標ですから，定理から逆算すると，

$$r=\frac{\int_a^b xf(x)\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}$$

が成り立てばよいことになります。

この積分は，区間 $a\leqq x\leqq b$ を $n$ 等分して，

$$\frac{\{x_1f(x_1)+x_2f(x_2)+\cdots\cdots+x_nf(x_n)\}\varDelta x}{\{f(x_1)+f(x_2)+\cdots\cdots+f(x_n)\}\varDelta x}$$

$$\left(\varDelta x=\frac{b-a}{n}\right)$$

について，$n\to\infty$ とした極限で得られます。

$n$ 等分して作った個々の矩形について，その面積を $m_1$，$m_2$，……，$m_n$ とすると，上の式は，

$$\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots\cdots+m_n}$$

となりますから，「面積＝質量」と考えると，極限を前提に精密さを少し省略すれば，重心の公式です。

この公式は，

$$\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

を繰り返し用いることで示せます。この式は，2つの質点の質量が，$m_1$，$m_2$ であるとき，その重心は質点を端点とする線分を，$m_2:m_1$ に内分する点であることを意味しています。

証明を簡単にするために，全体を平行移動することによって，

$$m_1x_1+m_2x_2=0$$

とします。これで，重心が原点のときにこの式が成り立つことを示せばよいことになりました。

高校数学による証明はここまでで，続きは物理で考えます。

まず重心とは何かですが，我々が普通に「重心」と呼んでいるものには次の２つがあると考えられます。

[1]　**回転の中心**

[2]　**重力に対してバランスがとれる点**

直感的にはこの２つは一致していますが，重力が均一でない場所ではこの２つは一致しません。

ちなみに，物理では，[1] を「質量中心」，[2] を「重心」と呼ぶようです。

証明は，[1]，[2] のそれぞれで考えます。

## §3. 証明（中）／高校物理編

**[1]　回転の中心**

証明すべき式

$$m_1x_1+m_2x_2=0$$

について，$x_1<0$，$x_2>0$ のとき

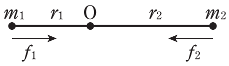
$$r_1=-x_1,\quad r_2=x_2$$

と定めると，

$$m_1r_1=m_2r_2$$

となります。

この $r_1$，$r_2$ を用いて図のような状況を考えます。




棒の両端に，質量が $m_1$，$m_2$ である質点があり，それぞれ点Ｏからの距離が $r_1$，$r_2$ であるとします。棒の質量は考えません。

点Ｏが重心であるとき，この棒を無重力状態，もしくは重力に対して垂直な摩擦のない平面上で回転させると，点Ｏを中心として回転します。

このとき，２つの質点を回転させるために働く力を $f_1$，$f_2$ とします。角速度は等しいので，それを $\omega$ とすると，

$$f_1=m_1r_1\omega^2,\quad f_2=m_2r_2\omega^2$$

です。これは物理の公式です。ご存知の通り，数学Ⅲの教科書でも円運動に関する項目で，加速度について述べられています。

点Ｏを中心として回転しているということは，この２つの力がつり合っているということですから，

$$f_1=f_2$$

$$m_1r_1\omega^2=m_2r_2\omega^2$$

です。回転している場合を考えているので　$\omega\neq 0$

よって，

$$m_1r_1=m_2r_2$$

が得られます。

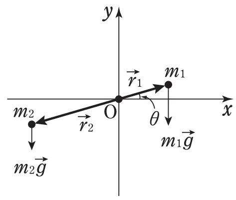
## §4. 証明（下）／力学編

次の内容は後述の参考文献に依るところが大きいですが，参考文献では一般的に証明をしているので，自分の理解のために，なるべく一般性を失わない範囲で具体的に成分を与え，高校数学の表記に改めて書きました。

また力学では，先に重心を式で定義して，外力が働かないときには重心の周りの角運動量が保存される，という順序で述べられるのが普通のようですが，ここでは，つり合っているときには角加速度が０であることから逆に重心の式が導かれる，という順序で書きました。

**[2]　重力に対してバランスがとれる点**

図のような状況を考えます。




$xyz$ 空間の $y$ 軸の正の向きを鉛直方向上向きとして，$xy$ 平面において，$x$ 軸とのなす角が $\theta$ である棒の両端に，質量 $m_1$，$m_2$ の質点があり，それぞれ点Ｏからの距離が $r_1$，$r_2$ であるとします。すなわち，

$$\vec{r_1}=(r_1\cos\theta,\ r_1\sin\theta,\ 0)$$

$$\vec{r_2}=(-r_2\cos\theta,\ -r_2\sin\theta,\ 0)$$

と定めます。$r_1$，$r_2$ は定数とし，$\theta$ のみを $t$ の関数とします。棒の質量は考えません。また，２つの質点には均一な重力

$$\vec{g}=(0,\ -g,\ 0)\ (g>0)$$

が作用しているものとします。

点Ｏが重心であるとき，この棒を点Ｏで支えると，静止もしくは等速回転します。

ここで，

$$\vec{v_1}=\frac{d}{dt}\vec{r_1},\quad \vec{a_1}=\frac{d}{dt}\vec{v_1}$$

$$\vec{v_2}=\frac{d}{dt}\vec{r_2},\quad \vec{a_2}=\frac{d}{dt}\vec{v_2}$$

とし，

$$\vec{L_1}=\vec{r_1}\times(m_1\vec{v_1})$$

$$\vec{L_2}=\vec{r_2}\times(m_2\vec{v_2})$$

と定めると，

$$\vec{L_1}=\left(0,\ 0,\ m_1{r_1}^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\vec{L_2}=\left(0,\ 0,\ m_2{r_2}^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

および，

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_1}=\left(0,\ 0,\ m_1{r_1}^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_2}=\left(0,\ 0,\ m_2{r_2}^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

となります。これらは，各質点の角運動量と，その微分です。この式からモーメントの式をつくるのは難しいですが，一方で，

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_1}=\frac{d}{dt}\{\overrightarrow{r_1}\times(m_1\overrightarrow{v_1})\}$$
$$=m_1(\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{a_1})$$
$$=m_1(\overrightarrow{r_1}\times\overrightarrow{a_1})$$

同様に，

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_2}=m_2(\overrightarrow{r_2}\times\overrightarrow{a_2})$$

であり，これが先ほどの成分表示と等しいことは，$\overrightarrow{a_1}$，$\overrightarrow{a_2}$ の成分を代入することで確認できます。

このとき，質量 $m_1$ の質点に働く力 $\overrightarrow{F_1}$ のうち，重力は $m_1\vec{g}$ ですから，点Oに向かう力を $\overrightarrow{f_1}$ とすると，

$$m_1\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{F_1}=\overrightarrow{f_1}+m_1\vec{g}$$

です。質量 $m_2$ の質点についても同様に定めると，

$$m_2\overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{f_2}+m_2\vec{g}$$

これより，

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_1}=\overrightarrow{r_1}\times(\overrightarrow{f_1}+m_1\vec{g})=\overrightarrow{r_1}\times(m_1\vec{g})$$

$$\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_2}=\overrightarrow{r_2}\times(\overrightarrow{f_2}+m_2\vec{g})=\overrightarrow{r_2}\times(m_2\vec{g})$$

したがって，

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{L_1}+\overrightarrow{L_2})=(m_1\overrightarrow{r_1}+m_2\overrightarrow{r_2})\times\vec{g}$$

となります。左辺は角運動量の和の微分，右辺は原点の周りの重力による力のモーメントの和です。

特に，棒が静止もしくは等速回転している場合は，

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=0$$

より，

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{L_1}+\overrightarrow{L_2})=\vec{0}$$

であり，$(m_1\overrightarrow{r_1}+m_2\overrightarrow{r_2})\parallel\vec{g}$ とは限らないので，

$$m_1\overrightarrow{r_1}+m_2\overrightarrow{r_2}=\vec{0}$$

すなわち，

$$(m_1r_1-m_2r_2)(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)=\vec{0}$$

よって，

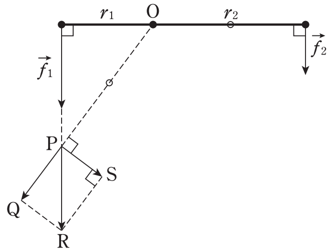
$$m_1r_1=m_2r_2$$

が得られます。

## §5. 補足／ニュートン編

以上で，パップス・ギュルダンの定理の証明を終わりますが，§4は運動方程式を用いてテコの原理を証明した，と見ることもできます。しかし，ニュートンの時代にはまだ外積は無かったのですから，ニュートンの証明は異なっていたはずです。それが気になってプリンキピアの訳本を読んでみたところ，直角三角形の相似のみを用いて極めて簡潔に証明をしていたことを初めて知りました。運動の法則Ⅲ系Ⅱの１つめの例です。

参考までに，証明に添えられた図を現代的に描くと次のようになります。




$r_1=r_2$ の場合を自明と認める必要はありますが，この図を自分で気が付いていたら，§4の力学による証明は必要ありませんでした。しかし残念ながら，この図には私の独自な部分は全く無いので，勉強の軌跡として§4を残させて頂きました。

なんで自分でこれに気付けなかったのだろうと，つくづく悔やまれます。

《参考文献》


〔１〕 V.D.バージャー・M.G.オルソン
『力学』培風館
〔２〕 兵頭俊夫『考える力学』学術図書出版社
〔３〕 アイザック・ニュートン
『プリンシピア 自然哲学の数学的諸原理』
講談社ブルーバックス


（東京都立国立高等学校）