誤った考え方でも答えが合ってしまう確率の問題

～一般化して考えることの大切さと新たな発見～

船山(ふなやま)　寛人(ひろと)

§1. はじめに

数学の問題を解いていく上で，誤った考え方で解いても答えが偶然合ってしまうことがある。特に場合の数や確率の単元においてはそのようなことが起こりやすいように感じる。今回紹介するサイコロの目の積が6の倍数になる問題では，サイコロを2個，3個投げたときのみならずn個投げた場合においても誤った考え方で答えが一致してしまうことがわかった。また，6の倍数でなく一般的にkの倍数になる確率を考えてみると，kに特定の条件がついた場合に成り立つ関係式があることもわかったので紹介していきたい。

§2. 確率が一致する例，一致しない例

(四訂版　クリアー数学演習Ⅰ・Ⅱ・A・B)
Practice 17
同時に何個かのサイコロを投げるとき，次の問いに答えよ。
(1) サイコロを1個投げるとき，サイコロの出た目が2の倍数になる確率，および3の倍数になる確率をそれぞれ求めよ。
(2) サイコロを同時に2個投げるとき，サイコロの出た目の積が2の倍数になる確率，および3の倍数になる確率をそれぞれ求めよ。
(3) サイコロを同時に2個投げるとき，サイコロの出た目の積が6の倍数になる確率を求めよ。
(4) サイコロを同時に3個投げるとき，サイコロの出た目の積が6の倍数になる確率を求めよ。
〔12 同志社大〕

この問題の解答は以下のように考えられる。

(1) 2の倍数：$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$　3の倍数：$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(2) 2の倍数：$1-\frac{3^2}{6^2}=\frac{3}{4}$　3の倍数：$1-\frac{4^2}{6^2}=\frac{5}{9}$

(3) 6を使って6の倍数になるとき，または6を使わないで6の倍数と考えると

$$\left(1-\frac{5^2}{6^2}\right)+\frac{4}{6^2}=\frac{11+4}{6^2}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

(4) 6を使って6の倍数になるとき，または6を使わないで6の倍数になるときと考える。

6を使って6の倍数になる確率は $\left(1-\frac{5^3}{6^3}\right)=\frac{91}{216}$

6を使わないで6の倍数になる確率は,「3個中少なくとも1つは3の倍数かつ少なくとも1つは2の倍数」のときである。余事象を考えると,「3個中すべて3の倍数でない，またはすべて2の倍数でない」と考えられるので，その確率は

$$\frac{5^3-(4^3+3^3-2^3)}{6^3}=\frac{42}{216}$$

よって，求める確率は　$\frac{91}{216}+\frac{42}{216}=\frac{133}{216}$

この問題を通して，生徒から1つの疑問が出てきた。(3)の2個サイコロを投げるとき，目の積が6の倍数になる確率が，(2)で求めた2の倍数になる確率と3の倍数になる確率の積になっているのは偶然なのか？　$\frac{5}{12}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{9}$

また，サイコロを3つ投げるときもこの関係が成立しているという。計算してみると，サイコロを3つ投げるとき目の積が2の倍数，3の倍数になる確率はそれぞれ $1-\frac{3^3}{6^3}=\frac{7}{8}$，$1-\frac{4^3}{6^3}=\frac{19}{27}$ であり，

$\frac{7}{8}\times\frac{19}{27}=\frac{133}{216}$ となり成立している。

「6の倍数」⇔「2の倍数かつ3の倍数」であることから思いついた発想であるが，題意の確率を計算するにあたっては誤った考え方である。これは偶然なのかどうか考え，試しにn個のサイコロを投げて目の積が6の倍数になる確率で検証したところ，以下のようにして成立することがわかった。

(解答例)

$$\left(1-\frac{5^n}{6^n}\right)+\frac{5^n-(4^n+3^n-2^n)}{6^n}=\frac{6^n-4^n-3^n+2^n}{6^n}$$

(誤答)

$$\left(1-\frac{3^n}{6^n}\right)\times\left(1-\frac{4^n}{6^n}\right)$$
$$=\frac{(6^n-3^n)(6^n-4^n)}{6^n\times 6^n}$$
$$=\frac{6^n\times 6^n-6^n(4^n+3^n)+(3\times 4)^n}{6^n\times 6^n}$$
$$=\frac{6^n-4^n-3^n+2^n}{6^n}$$

ここで，サイコロの個数を一般化するのではなく，出た目の積の条件を変えて考察してみることとし，目の積が10の倍数になる確率を考えてみることにした。その結果正答と誤答で答えが一致しないことがわかった。n個のサイコロを投げるとき，目の積が10の倍数になる確率について，

(解答例)

$$\frac{6^n-(5^n+3^n-2^n)}{6^n}$$

(誤答)

(目の積が2の倍数の確率)

×(目の積が5の倍数の確率)

$$=\left(1-\frac{3^n}{6^n}\right)\times\left(1-\frac{5^n}{6^n}\right)$$
$$=\frac{6^n\times 6^n-6^n(3^n+5^n)+(3\times 5)^n}{6^n\times 6^n}$$

以上のことから，目の積が6の倍数であると偶然答えが一致するが，目の積が10の倍数だと一致しない理由として，10はサイコロ1個投げたときの目の出方の事象に含まれていないことが要因ではないかと思った。そこでサイコロn個ではなく，1〜10の目が出るn個のルーレットを回したとき，目の積が10の倍数になる確率を考察した。

(解答例)

「10が少なくとも1回出て10の倍数，または10が1回も出ないで10の倍数」と考える。つまり「10が少なくとも1回出て10の倍数，または少なくとも1回2の倍数が出るかつ少なくとも1回5の倍数が出る」と考えられるので，求める確率は

$$\left(1-\frac{9^n}{10^n}\right)+\frac{9^n-(5^n+8^n-4^n)}{10^n}$$
$$=\frac{10^n-5^n-8^n+4^n}{10^n}$$

(誤答)

$$\left(1-\frac{5^n}{10^n}\right)\times\left(1-\frac{8^n}{10^n}\right)$$
$$=\frac{(10^n-5^n)(10^n-8^n)}{10^n\times 10^n}$$
$$=\frac{10^n\times 10^n-10^n(5^n+8^n)+(5\times 8)^n}{10^n\times 10^n}$$
$$=\frac{10^n-5^n-8^n+4^n}{10^n}$$

よってこの場合は正答と誤答で確率が一致することがわかった。しかし，1〜10の目が出るn個のルーレットを回したとき，目の積が6の倍数になる確率では，正答と誤答で確率が一致しなくなってしまった。

(解答例)

$$\left(1-\frac{9^n}{10^n}\right)+\frac{9^n-(5^n+7^n-3^n)}{10^n}$$
$$=\frac{10^n-5^n-7^n+3^n}{10^n}$$

(誤答)

$$\left(1-\frac{5^n}{10^n}\right)\times\left(1-\frac{7^n}{10^n}\right)$$
$$=\frac{(10^n-5^n)(10^n-7^n)}{10^n\times 10^n}$$
$$=\frac{10^n\times 10^n-10^n(5^n+8^n)+(5\times 7)^n}{10^n\times 10^n}$$

§3. 一般化

この他にも条件を少し変えて確率を考察してみたところ，次のように一般化できることがわかった。

> p，qは異なる素数とする。
> 1からpqまでのpq通りの目が出るルーレットをn個回したとき，目の積がpの倍数になる確率を$P(p)$，qの倍数になる確率を$P(q)$，pqの倍数になる確率を$P(pq)$とする。
> このとき，$P(pq)=P(p)\times P(q)$ が成り立つ。

(証明)

1からpqまでの目において，pの倍数はq個，qの倍数はp個，pqの倍数は1個である。

目の積が pq の倍数になる確率は，

⇒pq が少なくとも１回出て pq の倍数または pq が１回も出ないで pq の倍数

⇒pq が少なくとも１回出て pq の倍数または少なくとも１回 p の倍数が出るかつ少なくとも１回 q の倍数が出ると考えると

$$P(pq)$$

$$=\left\{1-\frac{(pq-1)^n}{(pq)^n}\right\}$$

$$+\frac{(pq-1)^n-\{(pq-q)^n+(pq-p)^n-(pq-p-q+1)^n\}}{(pq)^n}$$

$$=\frac{(pq)^n-q^n(p-1)^n-p^n(q-1)^n+\{(p-1)(q-1)\}^n}{(pq)^n}$$

また

$$P(p)\times P(q)$$

$$=\left\{1-\frac{(pq-q)^n}{(pq)^n}\right\}\left\{1-\frac{(pq-p)^n}{(pq)^n}\right\}$$

$$=\frac{\{(pq)^n-q^n(p-1)^n\}\{(pq)^n-p^n(q-1)^n\}}{(pq)^n\times(pq)^n}$$

$$=\frac{(pq)^n\times(pq)^n-(pq)^n\times p^n(q-1)^n-(pq)^n\times q^n(p-1)^n+p^nq^n(p-1)^n(q-1)^n}{(pq)^n\times(pq)^n}$$

$$=\frac{(pq)^n-p^n(q-1)^n-p^n(q-1)^n+\{(p-1)(q-1)\}^n}{(pq)^n}$$

$$=P(pq)$$

§4. おわりに

今回の問題を通して，特に場合の数や確率の指導において，答えが合って満足するのでなく，答えを導いた考え方が本当に正しい考え方かどうかを生徒自身が検証しようとする態度を身につけさせることが大切だと改めて考えさせられた。また，どのような場面でも成り立つのかを考えるために，条件を変えたり，一般化して考えたりすることの大切さと面白さにも改めて気づくことができた。

《参考文献》

〔１〕 四訂版 クリアー数学演習Ⅰ･Ⅱ･A･B 受験編 数研出版編集部

（栃木県立烏山高等学校）