複 2 次式の 1 次式の積への分解について

久末　正樹（ひさすえ　まさき）

§1. はじめに

複 2 次式とは，次数がすべて偶数の項のみからなる多項式のことである。高校 1 年で学ぶ 4 次式の複 2 次式の因数分解は，はじめに x^2 を t など他の文字におき換えて 2 次式にしてから因数分解できるかどうかを考える。できない場合は技巧的に【平方の差】の形を作り出して因数分解する。

例えば，x^4-5x^2+6 は $x^2=t$ とおく（おき換え法）と，t^2-5t+6 となり，これは $(t-2)(t-3)$ と因数分解できるので

$$x^4-5x^2+6=(x^2-2)(x^2-3)$$

と因数分解できる。

また x^4-16 の場合，$x^2=t$ とおくと，t^2-16 となり，これは $(t+4)(t-4)$ と分解できるので

$$\begin{aligned}x^4-16&=(x^2+4)(x^2-4)\\&=(x^2+4)(x+2)(x-2)\end{aligned}$$

と因数分解できる。

次に，x^4+x^2+1 を因数分解する場合，$x^2=t$ とおくと，t^2+t+1 となり，これは因数分解できない。そこで【平方の差】の形にするというように発想を変えて

$$\begin{aligned}x^4+x^2+1&=(x^2+1)^2-x^2\\&=(x^2+x+1)(x^2-x+1)\end{aligned}$$

と因数分解される。

この式は変形の最初の項を $(x^2+1)^2$（プラス法）としたが，もし $(x^2-1)^2$（マイナス法）にすると

$$x^4+x^2+1=(x^2-1)^2+3x^2$$

となるため，有理数の範囲では因数分解できない。だから大抵の場合，どちらかで変形してうまくいく方で因数分解を進めていく，という指導になる。

一方，次の式を考える：$9x^4-13x^2+4$

この式は $x^2=t$ とおくと，$9t^2-13t+4$ となり，これは $(t-1)(9t-4)$ と因数分解できるので $(x^2-1)(9x^2-4)$ となり，さらに $(x+1)(x-1)(3x+2)(3x-2)$ とできる。また実は，この式は【平方の差】の形に変形して因数分解することもできる。

プラス法の場合，

$$\begin{aligned}9x^4-13x^2+4&=(3x^2+2)^2-25x^2\\&=(3x^2+5x+2)(3x^2-5x+2)\\&=(3x+2)(x+1)(3x-2)(x-1)\end{aligned}$$

マイナス法の場合，

$$\begin{aligned}9x^4-13x^2+4&=(3x^2-2)^2-x^2\\&=(3x^2+x-2)(3x^2-x-2)\\&=(3x-2)(x+1)(3x+2)(x-1)\end{aligned}$$

つまりおき換え法でも因数分解できるし，プラス法・マイナス法で考えても因数分解できる。では，どのような式のときにこのような因数分解ができるのだろうか。

§2. 因数分解できる式

複 2 次式において定数項が 0 の場合は容易に因数分解できるのでこれ以降は除外して考えることにする。

まず初めに次の補題を証明する。

補題

実数 $a,\ b,\ c,\ d$ について，$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$ が複 2 次式のときは必ず $(x+m)(x-m)(x+n)(x-n)$ の形になる。

【証明】

$$\begin{aligned}&(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)\\&=x^4+(a+b+c+d)x^3\\&\quad+(ab+ac+ad+bc+bd+cd)x\\&\quad+(abc+abd+acd+bcd)x+abcd\end{aligned}\quad\cdots\cdots(☆)$$

が複 2 次式なので $a+b+c+d=0$ ……① かつ $abc+abd+acd+bcd=0$ ……② である。

①より $a+c=-(b+d)$ を②の $ac(b+d)+bd(a+c)=0$ に代入すると $(ac-bd)(b+d)=0$ となる。

このとき $b+d=0$ ならば①より $a+c=0$ であり，$d=-b$ かつ $c=-a$ となるから

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$$
$$=(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)$$

が成り立つ。

また $b+d \fallingdotseq 0$ ならば $ac-bd=0$ である。このとき(☆)の定数項は $abcd=(ac)^2$ であり，x^2 の係数は

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd$$
$$=(a+c)(b+d)+ac+bd$$
$$=-(a+c)^2+2ac$$
$$=-(a^2+c^2)$$

となるから

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)$$
$$=x^4-(a^2+c^2)x^2+(ac)^2$$
$$=(x^2-a^2)(x^2-c^2)$$
$$=(x+a)(x-a)(x+c)(x-c)$$

となり成り立つ。**【証明終】**

補題の結果により，次の命題が成り立つ。

> 有理数 a，p，q に対し
>
> $$a^2x^4-\frac{p^2+q^2}{2}x^2+\left(\frac{p^2-q^2}{4a}\right)^2$$
>
> の形に限り，プラス法でもマイナス法でも有理数の範囲で1次式の積に因数分解でき，またおき換え法でも因数分解できる。
>
> 特に $a=1$ のときは
>
> $$x^4-\frac{p^2+q^2}{2}x^2+\left(\frac{p^2-q^2}{4}\right)^2$$
>
> の式のみがいずれの方法でも1次式の積に因数分解できる。

【証明】

(おき換え法)

$x^2=t$ とおくと

$$(\text{与式})=a^2t^2-\frac{p^2+q^2}{2}t+\left(\frac{p^2-q^2}{4a}\right)^2$$
$$=\left\{at-\frac{(p+q)^2}{4a}\right\}\left\{at-\frac{(p-q)^2}{4a}\right\}$$
$$=\left\{ax^2-\frac{(p+q)^2}{4a}\right\}\left\{ax^2-\frac{(p-q)^2}{4a}\right\}$$
$$=a^2\left(x+\frac{p+q}{2a}\right)\left(x+\frac{p-q}{2a}\right)$$
$$\times\left(x+\frac{-p+q}{2a}\right)\left(x+\frac{-p-q}{2a}\right)$$

(プラス法)

$$(\text{与式})=\left(ax^2+\frac{p^2-q^2}{4a}\right)^2-(px)^2$$
$$=\left(ax^2+px+\frac{p^2-q^2}{4a}\right)\left(ax^2-px+\frac{p^2-q^2}{4a}\right)$$
$$=a^2\left(x+\frac{p+q}{2a}\right)\left(x+\frac{p-q}{2a}\right)$$
$$\times\left(x+\frac{-p+q}{2a}\right)\left(x+\frac{-p-q}{2a}\right)$$

(マイナス法)

$$(\text{与式})=\left(ax^2-\frac{p^2-q^2}{4a}\right)^2-(qx)^2$$
$$=\left(ax^2+qx-\frac{p^2-q^2}{4a}\right)\left(ax^2-qx-\frac{p^2-q^2}{4a}\right)$$
$$=a^2\left(x+\frac{p+q}{2a}\right)\left(x+\frac{p-q}{2a}\right)$$
$$\times\left(x+\frac{-p+q}{2a}\right)\left(x+\frac{-p-q}{2a}\right)$$

逆に1次式の積に因数分解できるのはこの形のみであることを証明する。

複2次式がプラス法でもマイナス法でも表せるということは，$(ax^2+b)^2-(px)^2=(ax^2-b)^2-(qx)^2$ を満たす有理数 a，b，p，q が存在するということである。

この式を展開すると

$a^2x^4+(2ab-p^2)x^2+b^2=a^2x^4+(-2ab-q^2)x^2+b^2$

となるから，係数を比較することにより

$$2ab-p^2=-2ab-q^2$$

よって，$2ab=\dfrac{p^2-q^2}{2}$ より

$2ab-p^2=-2ab-q^2=-\dfrac{p^2+q^2}{2}$ であり

$$b=\frac{p^2-q^2}{4a}$$

となる。ゆえに

$$(ax^2+b)^2-(px)^2$$
$$=a^2x^4+(2ab-p^2)x^2+b^2$$
$$=a^2x^4+\left(\frac{p^2-q^2}{2}-p^2\right)x^2+\left(\frac{p^2-q^2}{4a}\right)^2$$
$$=a^2x^4-\frac{p^2+q^2}{2}x^2+\left(\frac{p^2-q^2}{4a}\right)^2$$

の形に必然的になる。また，1次式の積にかけるので補題により $a^2(x+m)(x-m)(x+n)(x-n)$ の形である。また

$$a^2(x+m)(x-m)(x+n)(x-n)$$
$$=a^2\{x^4-(m^2+n^2)x^2+m^2n^2\}$$

ここで $m=\dfrac{p+q}{2a}$，$n=\dfrac{p-q}{2a}$ とおくと

$m^2+n^2=\dfrac{p^2+q^2}{2a^2}$，$m^2n^2=\left(\dfrac{p^2-q^2}{4a^2}\right)^2$ となるから

$$a^2\{x^4-(m^2+n^2)x^2+m^2n^2\}$$
$$=a^2x^4-\frac{p^2+q^2}{2}x^2+\left(\frac{p^2-q^2}{4a}\right)^2$$

となり題意を満たす。**【証明終】**

§1. で考察した $9x^4-13x^2+4$ は $a=3$，$p=5$，$q=1$ の場合である。

また，$a=1$，$p=\dfrac{5}{3}$，$q=\dfrac{1}{3}$ のときは

$x^4-\dfrac{13}{9}x^2+\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{9}(9x^4-13x^2+4)$ となり

$a=3$，$p=5$，$q=1$ の場合の定数倍であるから，本質的には $a=1$ の場合のみを考えれば十分である。

§3. 具体例

以下，いくつかの具体例を挙げる。係数が分数になる場合は，定数倍して係数が整数になるようにした。また $p^2>q^2>0$ の場合のみにした。

$a=1$ の場合

p^2	q^2	複2次式	因数分解
4	1	$16x^4-40x^2+9$	$(2x+1)(2x-1)$ $\times(2x+3)(2x-3)$
9	1	x^4-5x^2+4	$(x+1)(x-1)$ $\times(x+2)(x-2)$
9	4	$16x^4-104x^2+25$	$(2x+1)(2x-1)$ $\times(2x+5)(2x-5)$
16	1	$16x^4-136x^2+225$	$(2x+3)(2x-3)$ $\times(2x+5)(2x-5)$
16	4	x^4-10x^2+9	$(x+1)(x-1)$ $\times(x+3)(x-3)$
16	9	$16x^4-200x^2+49$	$(2x+1)(2x-1)$ $\times(2x+7)(2x-7)$
25	1	x^4-13x^2+36	$(x+2)(x-2)$ $\times(x+3)(x-3)$

$a=2$ の場合

p^2	q^2	複2次式	因数分解
9	1	$4x^4-5x^2+1$	$(x+1)(x-1)$ $\times(2x+1)(2x-1)$
25	1	$4x^4-13x^2+9$	$(x+3)(x-3)$ $\times(2x+1)(2x-1)$
25	9	$4x^4-17x^2+4$	$(x+2)(x-2)$ $\times(2x+1)(2x-1)$
49	1	$4x^4-25x^2+36$	$(x+1)(x-1)$ $\times(2x+3)(2x-3)$
49	9	$4x^4-29x^2+25$	$(x+1)(x-1)$ $\times(2x+5)(2x-5)$
49	25	$4x^4-37x^2+9$	$(x+3)(x-3)$ $\times(2x+1)(2x-1)$

$a=3$ の場合

p^2	q^2	複2次式	因数分解
16	4	$9x^4-10x^2+1$	$(x+1)(x-1)$ $\times(3x+1)(3x-1)$
25	1	$9x^4-13x^2+4$	$(x+1)(x-1)$ $\times(3x+2)(3x-2)$
49	1	$9x^4-25x^2+16$	$(x+1)(x-1)$ $\times(3x+4)(3x-4)$
49	25	$9x^4-37x^2+4$	$(x+2)(x-2)$ $\times(3x+1)(3x-1)$
64	4	$9x^4-34x^2+25$	$(x+1)(x-1)$ $\times(3x+5)(3x-5)$
64	16	$9x^4-40x^2+16$	$(x+2)(x-2)$ $\times(3x+2)(3x-2)$

§4. 最後に

1次式の積に因数分解できる複2次式についての考察をしたわけですが，逆に2次式の積にまでしか因数分解できない複2次式について，また2次式の積の形にも変形できない場合についてさらに考察を深めていきたいと思います。

（北海道　市立函館高等学校）