高校生に伝えたい3つの証明

森（もり）　茂（しげる）

§1. はじめに

高校の数学で教えている定理には，その証明を高校生に理解してもらうのに苦労する定理がいくつかあります。それらのうちの3つの定理について，比較的理解しやすい証明を考案したので，紹介します。使っていただけたら幸いです。

§2. オイラーの多面体定理

オイラーの多面体定理

多面体において頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると

$$v-e+f=2$$

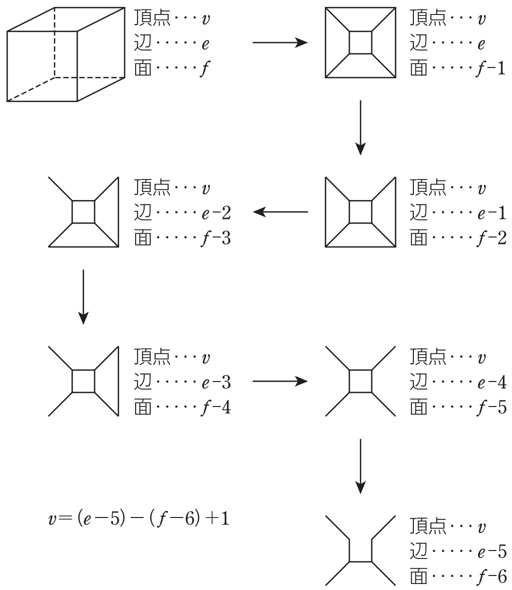
証明

任意の多面体を1つとり，頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とする。まず，多面体の1つの多角形を取り除き，その多角形を押し広げて外周にもってきて，平面上の図形を作る。(形相図という) このとき，頂点の数が v，辺の数が e，面の数が $f-1$ になる。次に，面の数が1減るように辺を1つ取り除く。このとき，頂点の数が v，辺の数が $e-1$，面の数が $f-2$ になる。これを面の数が0になるまで $(f-1)$ 回繰り返す。ついには，頂点の数が v，辺の数が $e-(f-1)$，面の数が0になる。樹形図においては (頂点の数)=(辺の数)+1 が成り立つ。

なぜなら，任意の樹形図を1つとり，頂点の数を v，辺の数を e とする。一番外側にある頂点とそれに隣接する辺を取り除くと，頂点の数が $v-1$，辺の数が $e-1$ になる。これを辺の数が0になるまで，e 回繰り返す。最後に頂点が1つ残る。
ゆえに　$v-e=1$　よって　$v=e+1$

ゆえに　$v=\{e-(f-1)\}+1$

よって　$v-e+f=2$



§3. 正多面体にまつわる定理

正多面体にまつわる定理

正多面体は正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体の5つである。

証明

任意の正多面体を1つとり，頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とする。オイラーの多面体定理によって　$v-e+f=2$

$$4e-4v-4f=-8$$

$$4e^2-4ve-4fe=-8e$$

$$(2e-2v)(2e-2f)=4vf-8e$$

$$\left(\frac{2e}{v}-2\right)\left(\frac{2e}{f}-2\right)=4-\frac{8e}{vf}$$

$$\left(\frac{2e}{v}-2\right)\left(\frac{2e}{f}-2\right)<4$$

$\dfrac{2e}{v}$ は1つの頂点に集まる辺の数を表すから

$$\frac{2e}{v} \text{ は3以上の整数}$$

［なぜなら，1つの頂点に集まる辺の数を m とする。mv は辺の数の2倍になるから

$$mv=2e \quad \text{ゆえに} \quad m=\frac{2e}{v}$$

］

$\dfrac{2e}{f}$ は表面の正多角形の辺の数を表すから

$$\frac{2e}{f} \text{ は3以上の整数}$$

［なぜなら，表面が正 n 角形であるとする。nf は辺の数の2倍になるから

$$nf=2e \quad \text{ゆえに} \quad n=\frac{2e}{f}$$

］

$\left(\dfrac{2e}{v}-2\right)\left(\dfrac{2e}{f}-2\right)<4$ より

$$\left(\frac{2e}{v}-2,\ \frac{2e}{f}-2\right)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1),\ (2,\ 1)$$

ゆえに $\left(\dfrac{2e}{v},\ \dfrac{2e}{f}\right)=(3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 3),\ (5,\ 3)$

$$(v,\ 2e)=\left(\frac{2e}{3},\ 3f\right),\ \left(\frac{2e}{3},\ 4f\right),\ \left(\frac{2e}{3},\ 5f\right),\ \left(\frac{2e}{4},\ 3f\right),\ \left(\frac{2e}{5},\ 3f\right)$$

$$(e,\ v)=\left(\frac{3f}{2},\ f\right),\ \left(2f,\ \frac{4f}{3}\right),\ \left(\frac{5f}{2},\ \frac{5f}{3}\right),\ \left(\frac{3f}{2},\ \frac{3f}{4}\right),\ \left(\frac{3f}{2},\ \frac{3f}{5}\right)$$

オイラーの多面体定理 $v-e+f=2$ に代入して

$$f-\frac{3}{2}f+f=2,\ \frac{4}{3}f-2f+f=2,$$

$$\frac{5}{3}f-\frac{5}{2}f+f=2,\ \frac{3}{4}f-\frac{3}{2}f+f=2,$$

$$\frac{3}{5}f-\frac{3}{2}f+f=2$$

$$\frac{1}{2}f=2,\ \frac{1}{3}f=2,\ \frac{1}{6}f=2,\ \frac{1}{4}f=2,\ \frac{1}{10}f=2$$

$$f=4,\ 6,\ 12,\ 8,\ 20$$

§4. 二項定理

二項定理

a，b を実数，n を自然数とする。

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$$

証明

第1段

a 室あるAホテルと b 室あるBホテルがある。n 人の人がこの2つのホテルに分かれて宿泊する状況を考える。誰も泊まらない部屋があってもよい，全員が同じ部屋に泊まってもよいとしたときの泊まり方の総数を N とする。

***N* を求める第1の方法**

まず，Bホテルに泊まる r 人と，Aホテルに泊まる $(n-r)$ 人を選ぶ。選び方の総数は ${}_n\mathrm{C}_r$ 通り。Aホテルに泊まる $(n-r)$ 人について，どの部屋に泊まるかを決める方法は a^{n-r} 通り。Bホテルに泊まる r 人について，どの部屋に泊まるかを決める方法は b^r 通り。

ゆえに　$N=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$

***N* を求める第2の方法**

AホテルとBホテルを合併して，$a+b$ 個の客室をもつ1つのホテルを考える。n 人の人について，どの部屋に泊まるかを決める方法は $(a+b)^n$ 通り。

ゆえに　$N=(a+b)^n$

よって　$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$

第2段

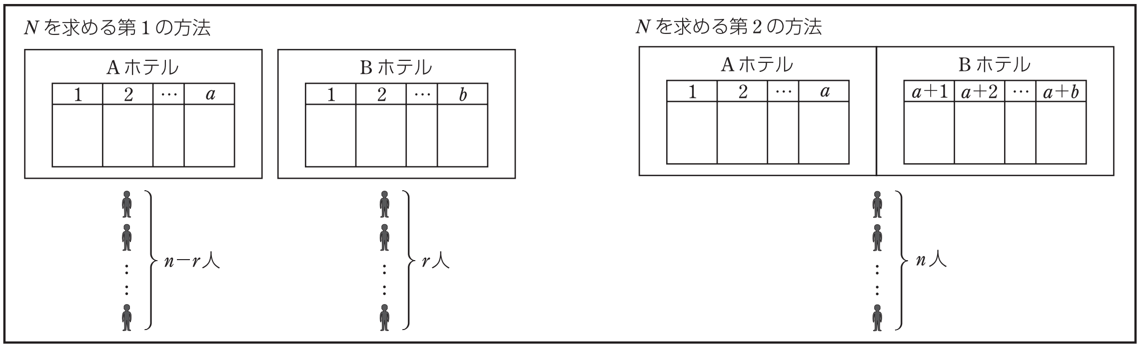
$$f(a)=(a+b)^n-\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r \text{ とおく。}$$

$f(a)=0$ は a に関する n 次方程式であるが，0，1，2，…，n の $n+1$ 個の解をもつ。n 次方程式が $n+1$ 個の解をもつことはないから，$f(a)=0$ は a についての恒等式である。ゆえに，任意の実数 a について

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$$

任意の実数 b についても同様であるから，任意の実数 a，b について

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$$



（福井県　仁愛女子高等学校）