2次曲線と屈折

まつだ　やすお
松田　康雄

§1. はじめに…研究の動機

光の反射に関して，反射面が楕円や双曲線の場合，焦点から出た光は反射して，楕円の場合は他の焦点を通り，双曲線の場合は他の焦点の延長線を進む。(図1，2)では，光の屈折に関して，境界面が楕円や双曲線の場合はどうなるかと考えたのが研究の動機である。

光がある媒質から別の媒質へ境界面を経て進むとき，光は屈折する。光の入射角を α，屈折角を β とするとき $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ を屈折率という。(図3)本稿では，境界線が楕円または双曲線のときの屈折率に関する次の定理を証明する。(図4，5)

定理. 境界面が楕円または双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0,\ x>0) \qquad ①$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a,\ b>0,\ x>0) \qquad ②$$

の場合，⑴，⑵の焦点F(x 座標が負の方)から出た光が屈折して x 軸に平行に進むとき，屈折率は①，②の離心率 e，すなわち

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=e \qquad ③$$

である。

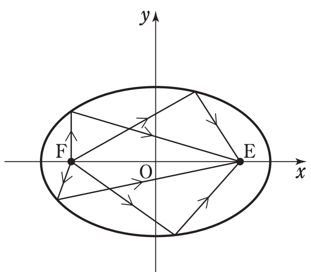

図1　楕円の中での光の反射

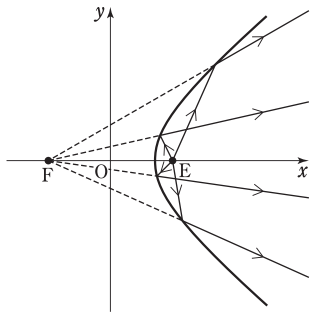

図2　双曲線の中での光の反射

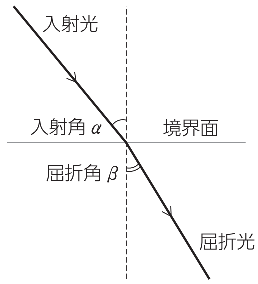

図3　光の屈折

§2. 本論…定理の証明

①，②上の点P(x_0，y_0)(頂点は除く)における接線を ℓ，法線を n とし，n と直線PFのなす角を α(鋭角・入射角)，n と x 軸のなす角を β(鋭角・屈折角)とする。

①，②の焦点で x 座標が正，負のものをそれぞれE，Fとし，x 軸と正の部分で交わる準線を d，Pから d に下ろした垂線の足をHとする。①，②の離心率 e に関して

$$e=\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{PH}}=\frac{\sqrt{a^2\mp b^2}}{a} \qquad ④，⑤$$

が成り立つ。(以下，複号の上は楕円①，下は双曲線②の場合とする。)また

$$\mathrm{PF}\pm\mathrm{PE}=2a \qquad ⑥$$

が成り立つ。

n と x 軸の交点を Q とする。直線 PH は x 軸と平行なので，$\angle\mathrm{PQE}=\beta$ である。

$\triangle\mathrm{PFQ}$ において，楕円①の場合 $\angle\mathrm{FPQ}=\alpha$，$\angle\mathrm{PQF}=\pi-\beta$，双曲線②の場合 $\angle\mathrm{FPQ}=\pi-\alpha$，$\angle\mathrm{PQF}=\beta$ である。いずれも正弦定理から

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\mathrm{QF}}{\mathrm{PF}} \qquad ⑦$$

が成り立つ。

$\mathrm{F}(-ea,\ 0)$，$d：x=\dfrac{a}{e}$，$\ell：\dfrac{x_0x}{a^2}\pm\dfrac{y_0y}{b^2}=1$

ℓ と P で直交する n は⑤から

$\dfrac{y_0x}{b^2}\mp\dfrac{x_0y}{a^2}=\dfrac{e^2}{b^2}x_0y_0$ と表され，$\mathrm{Q}(e^2x_0,\ 0)$ なので

$$\mathrm{QF}=e^2x_0+ea \qquad ⑧$$

また，④から

$$\mathrm{PE}=e\mathrm{PH}=\pm e\left(\frac{a}{e}-x_0\right)=\pm(a-ex_0)$$

なので，⑥から

$$\mathrm{PF}=2a\mp\mathrm{PE}=a+ex_0 \qquad ⑨$$

⑧，⑨から $\dfrac{\mathrm{QF}}{\mathrm{PF}}=e$ が成り立ち，⑦から③が示され，定理が示された。 □

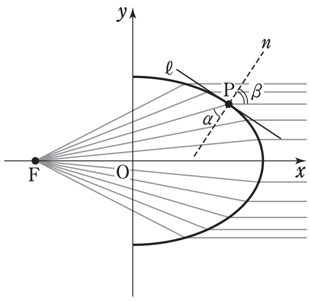

図4　境界線が楕円の光の屈折
　　ー屈折率が e の場合

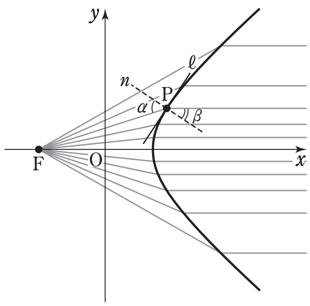

図5　境界線が双曲線の光の屈折
　　ー屈折率が e の場合

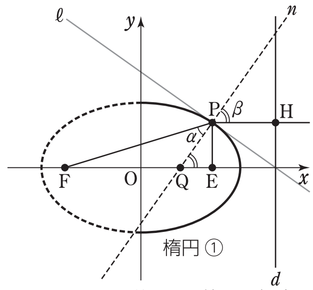

図6　証明の説明図ー楕円の場合

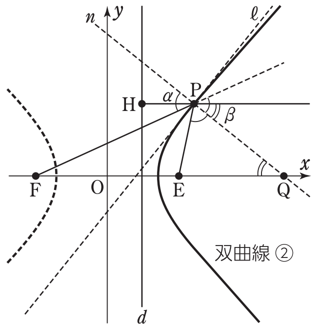

図7　証明の説明図ー双曲線の場合

§3. 補足

境界面が楕円のとき，焦点から出た光の屈折は，屈折率が e より大きい場合と小さい場合で，それぞれ図 8，9 のようになる。

境界面が放物線の場合，屈折率が離心率 $e=1$ とすると，光の入射角 α と屈折角 β が一致して，光は直進すると解釈される。

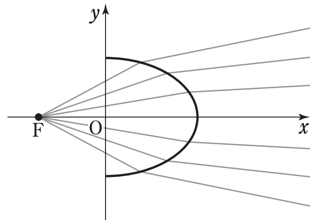

図8　境界面が楕円の光の屈折
　　ー屈折率が e より大きい場合

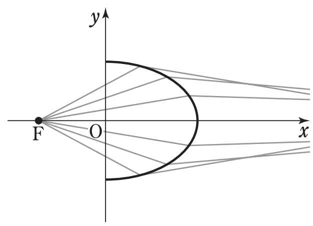

図9　境界面が楕円の光の屈折
　　ー屈折率が e より小さい場合

§4. おわりに

境界面が楕円や双曲線の光の屈折について [3], [6], [7] で紹介されている。そこでは微分方程式の問題として扱われている。本稿では定理をできるだけ初等的に証明した。△PFQ の中に入射角 α と屈折角 β が現れて，それをもとに正弦定理を用いることが証明のポイントであった。2 次曲線の焦点は光の反射だけでなく屈折に関しても重要なことが認識できた。

《参考文献》

〔1〕 植松恒夫他，高等学校理科用教科書　物理改訂版，啓林館，2017 年，150-151.

〔2〕 大島利雄他，高等学校数学科用教科書　改訂版数学Ⅲ，数研出版，2019 年，p. 59.

〔3〕 岡本久，日常現象からの解析学，近代科学社，2016 年，105-109.

〔4〕 尾崎義治訳，ヘクト光学Ⅰ，丸善出版，2018 年，274-278.

〔5〕 國友正和他，高等学校理科用教科書　改訂版物理，数研出版，2018 年，146-147.

〔6〕 栗田稔，初等数学 15 講，自費出版，1990 年，61-65.

〔7〕 一松信，幾何光学の古典的問題，現代数学 2018 年 1 月号，p. 32.

〔8〕 松田康雄，最短時間の経路，数研通信数学 No. 90，数研出版，2017 年，8-9.

（長崎大学　教育学部）