2021年度　東大入試　通過領域の問題を考える
～直感と論理の狭間で～

ふじおか　まさと
藤岡　優太

§1. はじめに

2021年度 東大入試（文理共通問題）において通過領域に関する以下の内容の問題が出題されました。(実際の出題形式とは異なっています)

問　次の条件(1)を満たす放物線 $C：y=x^2+ax+b$ の通過領域Eを求めよ。

(1)「放物線Cと放物線 $y=-x^2$ は，x座標が $-1<x<0$ である共有点と $0<x<1$ である共有点をもつ。」

出題形式（小問設定）からすると，条件を満たすa，bの条件，すなわち$(a,\ b)$の存在領域Fからx，yの条件を考え，（実際には，ab平面において，直線 $xa+b+x^2-y=0$ と領域Fが共有点をもつ状況を考え），$(x,\ y)$の範囲を指定するという考えが自然な方法だと思います。ただ，ここでは，この考えとは違った考えをしてみることにします。

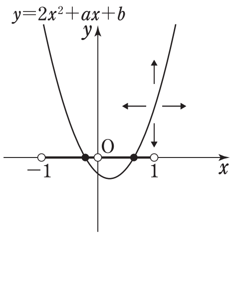
§2. 条件の言い換え…何と何の共有点と考えるか

条件(1)は，以下の条件(2)，あるいは，条件(3)に言い換えることができます。

(2)「放物線 $y=2x^2+ax+b$ と直線 $y=0$（x軸）は，x座標が $-1<x<0$ である共有点と $0<x<1$ である共有点をもつ。」

(3)「直線 $y=ax+b$ と放物線 $y=-2x^2$ は，x座標が $-1<x<0$ である共有点と $0<x<1$ である共有点をもつ。」

(2)を考えるなら，3点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$との位置関係を考えながら，$y=2x^2$ の形の放物線をどのように動かす（平行移動）ことができるかを調べることになります。



もしも，この動かせる範囲Gに関して，

$\boxed{0}$　Gは，3つの放物線からできる下の$\boxed{図1}$の領域である。

を「自明」と認めるならば，左下$\boxed{図1}$の領域でy座標に $-x^2$ を加えることで$\boxed{図2}$の打点部（境界は含まない）が求める領域であると直ちにわかります。

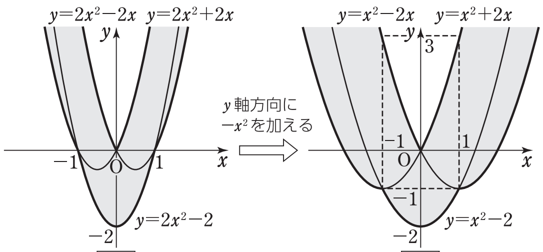


図1　　図2

しかし，さすがにこの$\boxed{0}$は，「自明」とするには，あまりに怪しい自明です…。

前置きが長くなってしまいました。この記事は(2)の話をするものではありませんので，以下，本題である(3)に進むことにします。

§3. (3)について考える

(3)では，曲線 $C_A：y=-2x^2\ (-1<x<0)$，曲線 $C_B：y=-2x^2\ (0<x<1)$ と 直 線 $\ell：y=ax+b$ の共有点を考えることになります。本来，直線ℓは，y軸に平行でないという制約のもとで直線全体を動くわけですが，y軸に平行な直線は，C_A，C_B両方と共有点をもつことはないため，y軸に平行でない直線という制約を設けることなく，ℓは直線全体を動くという設定で考えることにします。

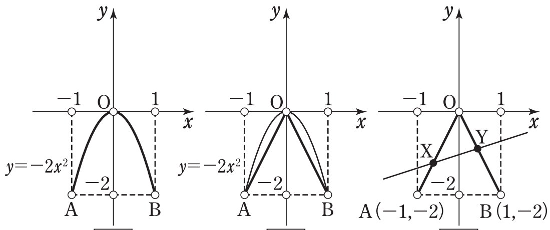
さて，(2)では怪しい自明$\boxed{0}$が登場しましたが，ここでは，以下の$\boxed{1}$，$\boxed{2}$を考えることにします。この$\boxed{1}$，$\boxed{2}$を，「自明」と認めるならば，$\boxed{図6}$の網掛部（境界は含まない）でy座標にx^2を加えることで$\boxed{図7}$の打点部（境界は含まない）が求める領域であると直ちにわかります。

$\boxed{1}$ 直線 ℓ に関する以下の条件 ☆，★ は同値である。

☆直線 ℓ が曲線 $C_{\mathrm{A}}: y=-2x^2\ (-1<x<0)$，曲線 $C_{\mathrm{B}}: y=-2x^2\ (0<x<1)$ と共有点をもつ。

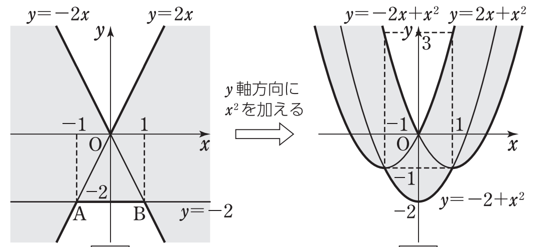
★直線 ℓ が線分 $\mathrm{OA}: y=2x\ (-1<x<0)$，線分 $\mathrm{OB}: y=-2x\ (0<x<1)$ と共有点をもつ。

（$\boxed{図3}$，$\boxed{図4}$，$\boxed{図5}$）



$\boxed{図3}$ $\boxed{図4}$ $\boxed{図5}$

$\boxed{2}$ 線分 $\mathrm{OA}: y=2x\ (-1<x<0)$ 上の点 X，線分 $\mathrm{OB}: y=-2x\ (0<x<1)$ 上の点 Y を結んでできる直線 XY の通過領域は $\boxed{図6}$ 網掛部（境界は含まない）の領域である。



$\boxed{図6}$ $\boxed{図7}$

⑵での怪しい自明 $\boxed{0}$ と比べ，この $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ の「自明」はどうでしょうか？ここでの「自明」は直感的，論理的に確信の持てる自明でしょうか？ $\boxed{2}$ はまだしも，$\boxed{1}$ はかなり怪しいような気もしますが…。

以下では，「自明」な $\boxed{1}$，$\boxed{2}$ についての証明を行います。議論はすべて平面上での話とし，曲線は，閉区間 $[0,\ 1]$ で定義された連続関数 $x(t)$，$y(t)$ によって媒介変数表示される曲線（連続曲線）であって，$(x(0),\ y(0))\neq(x(1),\ y(1))$ を満たすものとします。

§4. $\boxed{1}$ の証明

ここでは，少し一般的な形で証明を行うこととし，面倒ですが，以下の設定（$\boxed{定義}$）をします。

以降においては簡便のため，図形（領域）D に対し，D の内部を $\mathrm{Int}(D)$，D の外部を $\mathrm{Ext}(D)$，D の境界を $\partial(D)$ で表すことにします。さらに，線分 XY は両端 X，Y を含む線分を表し，線分 (XY) は両端 X，Y を除いた線分を表すものとし，曲線 C は両端を含む曲線を，曲線 (C) は両端を除いた曲線を表すものとします。

定義 $\mathrm{O_A}$，A を端点とする曲線 C_{A}，および，$\mathrm{O_B}$，B を端点とする曲線 C_{B} に対して，以下の【条件】①，②，③を満たす点 A′，B′ が存在するとき，

「2 曲線 C_{A}，C_{B} は良い配置である」

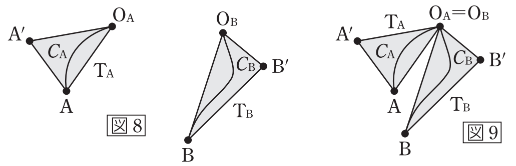
ということにします。

【条件】

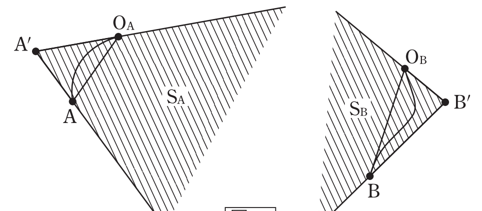
① $\triangle \mathrm{A'AO_A}$（$=\mathrm{T_A}$ とする）は，曲線 (C_{A}) を内部に含み，$\triangle \mathrm{B'O_BB}$（$=\mathrm{T_B}$ とする）は，曲線 (C_{B}) を内部に含む（$\boxed{図8}$）。

② $\mathrm{T_A}$ と $\mathrm{T_B}$ は共有点をもたない，または，1 つの頂点のみを共有点にもつ（$\boxed{図8}$，$\boxed{図9}$）。

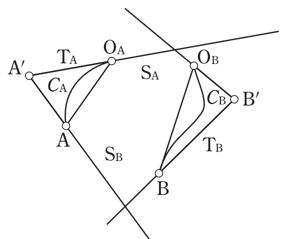
③ A′ を端点とする 2 つの半直線 $\mathrm{A'O_A}$，A′A でできる領域のうち，線分 $\mathrm{O_AA}$ を含む領域（境界を含む）を $\mathrm{S_A}$，B′ を端点とする 2 つの半直線 $\mathrm{B'O_B}$，B′B でできる領域のうち，線分 $\mathrm{O_BB}$ を含む領域（境界を含む）を $\mathrm{S_B}$ とする（$\boxed{図10}$）。このとき，$\mathrm{T_A}\subset\mathrm{S_B}$，$\mathrm{T_B}\subset\mathrm{S_A}$ が成り立つ（$\boxed{図11}$）。



$\boxed{図8}$ $\boxed{図9}$



$\boxed{図10}$



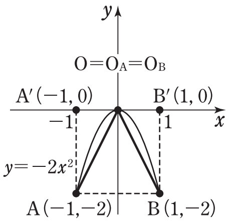
$\boxed{図11}$

以下，2 曲線 C_{A}，C_{B} が良い配置であるとき，直線 L に関する下記の条件 ☆☆，★★ が同値であることを示します。

☆☆直線 L が曲線 (C_{A})，(C_{B}) と共有点をもつ。

★★直線 L が線分 (OA)，線分 (OB) と共有点をもつ。

これが示されれば，$\boxed{1}$ において $\mathrm{O_A}=\mathrm{O_B}=\mathrm{O}$，
$\mathrm{A}(-1,\ -2)$，$\mathrm{B}(1,\ -2)$
$C_{\mathrm{A}}：y=-2x^2\ (-1\leqq x\leqq 0)$，
$C_{\mathrm{B}}：y=-2x^2\ (0\leqq x\leqq 1)$
と考えて，【条件】①，②，③を満たす $\mathrm{A}'(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}'(1,\ 0)$ がとれることから，$\boxed{1}$ の成立がわかります。



〈☆☆，★★が同値であること〉

〈☆☆ $\Longrightarrow$ ★★〉

$\boxed{\text{証明}}$

直線 L と曲線 (C_{A})，(C_{B}) の交点をそれぞれ $\mathrm{C_1}$，$\mathrm{C_2}$ とする。①から，曲線 $(C_{\mathrm{A}})\subset\mathrm{Int(T_A)}$，曲線 $(C_{\mathrm{B}})\subset\mathrm{Int(T_B)}$ であり，$\mathrm{C_1}\in\mathrm{Int(T_A)}$，$\mathrm{C_2}\in\mathrm{Int(T_B)}$ である。

A，B に関する条件の対等性から，直線 L が線分 $(\mathrm{O_A A})$ と共有点をもつことを示せば十分であり，以下，〈1〉～〈3〉に分けてこれを示す。

〈1〉 線分 $\mathrm{C_1C_2}\subset\mathrm{Int(S_A)}$ である。

$\boxed{\text{証明}}$ $\mathrm{T_A}\subset\mathrm{S_A}$ から，$\mathrm{Int(T_A)}\subset\mathrm{Int(S_A)}$ であり，$\mathrm{T_B}\subset\mathrm{S_A}$ から，$\mathrm{Int(T_B)}\subset\mathrm{Int(S_A)}$ である。したがって，$\mathrm{Int(S_A)}$ の 2 点を結ぶ線分が $\mathrm{Int(S_A)}$ に含まれること ($\mathrm{Int(S_A)}$ の凸性)から，線分 $\mathrm{C_1C_2}\subset\mathrm{Int(S_A)}$ であることがわかる。

〈2〉 線分 $\mathrm{C_1C_2}$ は $\partial\mathrm{(T_A)}$ と共有点をもつ。

$\boxed{\text{証明}}$ 条件②から，$\mathrm{Int(T_A)}\cap\mathrm{Int(T_B)}=\varnothing$ であり，$\mathrm{Int(T_B)}\subset\partial\mathrm{(T_A)}\cup\mathrm{Ext(T_A)}$ である。したがって，$\mathrm{C_1}\in\mathrm{Int(T_A)}$ と $\mathrm{C_2}\in\mathrm{Int(T_B)}\subset\partial\mathrm{(T_A)}\cup\mathrm{Ext(T_A)}$ を結ぶ線分 $\mathrm{C_1C_2}$ は，$\mathrm{T_A}$ の境界 $\partial\mathrm{(T_A)}$ と共有点を必ずもつ。(この共有点を $\mathrm{C_{1\cdot2}}$ とする)。

〈3〉 $\mathrm{C_{1\cdot2}}$ は線分 $(\mathrm{O_A A})$ 上の点である。

$\boxed{\text{証明}}$ 〈1〉より $\mathrm{C_{1\cdot2}}\in$ 線分 $\mathrm{C_1C_2}\subset\mathrm{Int(S_A)}$ であり，〈2〉より $\mathrm{C_{1\cdot2}}\in\partial\mathrm{(T_A)}$ である。したがって，$\mathrm{C_{1\cdot2}}\in\partial\mathrm{(T_A)}\cap\mathrm{Int(S_A)}=$ 線分 $(\mathrm{O_A A})$ であることがわかる。

〈☆☆ $\Longleftarrow$ ★★〉

$\boxed{\text{証明}}$

直線 L が，線分 $(\mathrm{O_A A})$，線分 $(\mathrm{O_B B})$ と共有点をもつとき，A，B に関する条件の対等性から，L が C_{A} と共有点をもつことを示せば十分。以下，《1》，《2》でこれを示す。

《1》 直線 L は直線 $\mathrm{O_A A}$ とは異なる。

$\boxed{\text{証明}}$ 線分 $(\mathrm{O_B B})\in\mathrm{Int(S_A)}$ であり，直線 $\mathrm{O_A A}$ と線分 $(\mathrm{O_B B})$ の共有点は，直線 $\mathrm{O_A A}\cap\mathrm{Int(S_A)}=$ 線分 $(\mathrm{O_A A})$ と線分 $(\mathrm{O_B B})$ の共有点である。ところで，条件②より，線分 $(\mathrm{O_A A})$ と線分 $(\mathrm{O_B B})$ は共有点をもたず，直線 L が直線 $\mathrm{O_A A}$ であることはあり得ない。

《2》 直線 L は曲線 (C_{A}) と共有点をもつ。

$\boxed{\text{証明}}$ 《1》より，2 点 $\mathrm{O_A}$，A は直線 L によって，L の両側に分けられる。したがって，L の両側に端点 $\mathrm{O_A}$，A をもつ (連続) 曲線 (C_{A}) は直線 L と必ず共有点をもつ。

§5. $\boxed{2}$ の証明

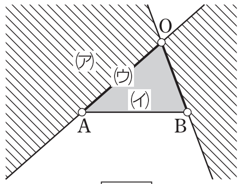
直感的には明らかかもしれませんが，ここでは，線分 (OA) 上の点 X，線分 (OB) 上の点 Y を結んでできる直線 XY の通過領域が，下の $\boxed{\text{図 12}}$ の

(ア) 斜線部分 $\boxed{}$ (境界は含まない)

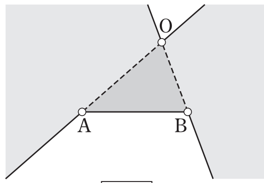
(イ) 網目部分 $\boxed{}$ (境界は含まない)

(ウ) 線分 (OA) および，線分 (OB)

を合わせた領域 ($\boxed{\text{図 13}}$)であることを示します。



$\boxed{\text{図 12}}$



$\boxed{\text{図 13}}$

この領域は，平面上の点 P を 1 次独立なベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と実数 s，t を用いて
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表した場合，

(ア)：$s>0$，$t<0$ または $s<0$，$t>0$

(イ)：$s+t<1$，$0<s<1$，$0<t<1$

(ウ)：$0<s<1$，$t=0$ または $0<t<1$，$s=0$

と表せます。

証明では，点 P に関する下記の条件 ◇，◆ が同値であることを用います。

◇線分 (OA) 上に点 X，線分 (OB) 上に点 Y をとり，点 P を通る直線 XY が引ける。

◆$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{\alpha}(\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\dfrac{t}{\beta}(\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ ……(＊)

$$0<\alpha<1,\ 0<\beta<1,\ \frac{s}{\alpha}+\frac{t}{\beta}=1$$

を満たす α，β が存在する。

以下，この同値性を簡単に示し，上記の証明を行います。

〈◇⟹◆〉

◇が成り立てば，実数 S，T を用いて

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=S\overrightarrow{\mathrm{OX}}+T\overrightarrow{\mathrm{OY}}$，$S+T=1$

とかける。また，$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ である実数 α，β を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とかける。したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=S(\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}})+T(\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}})$ とかけ，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が1次独立であることから，$s=S\alpha$，$t=T\beta$ であり，$\dfrac{s}{\alpha}+\dfrac{t}{\beta}=1$ から◆がいえる。

〈◆⟹◇〉

◆が成り立てば，$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である点 X，Y を線分 (OA)，線分 (OB) 上にとり，◇とできる。

〈直線 XY の通過領域が ㈦∪㈧∪㈨ であること〉

証明　平面全体を，

㈠　(＝㈦) s，t が異符号の領域

㈡　s，t が同符号の領域

㈢　$s=0$ または $t=0$ の領域

に分割し，㈠ (＝㈦) では全領域が，㈡では㈧が，㈢では㈨が適する領域であることを◆を用いて示す。

㈠について：

s，t に対する条件の対等性から，$s>0$，$t<0$ の場合を示せば十分である。式を見やすくするため，◆において，$a=\dfrac{1}{\alpha}$，$b=\dfrac{1}{\beta}$，$s'=s$，$t'=-t$ とし，$s'>0$，$t'>0$ の条件のもと，$as'-bt'=1$ である $a>1$，$b>1$ がとれることを示す。

$t'+1\,(t'>0)$ と $s'>0$ に対し，$bt'+1>s'$ となる $b\,(>1)$ がとれる。(なぜなら，$t'+1>s'$ のときは任意の $b\,(>1)$ がとれ，$t'+1\leqq s'$ のときは，十分大きな $b>1$ をとれば $t'>0$ より，$bt'+1>s'$ とできる。) このとき，この b に対し，a を $a=\dfrac{bt'+1}{s'}$ ととると，$a>1$，$as'-bt'=1$ を満たすことができる。

㈡について：

(i) $s<0$，$t<0$ の場合

$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ のもとでは，(＊) の変形において，$\dfrac{s}{\alpha}+\dfrac{t}{\beta}<0$ であり，$\dfrac{s}{\alpha}+\dfrac{t}{\beta}=1$ とはできない。

(ii) $s>0$，$t>0$，$s+t\geqq1$ の場合

$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ のもとでは，(＊) の変形において $\dfrac{s}{\alpha}+\dfrac{t}{\beta}>s+t\geqq1$ であり，$\dfrac{s}{\alpha}+\dfrac{t}{\beta}=1$ とはできない。

(iii) $s>0$，$t>0$，$s+t=k<1$ の場合

$\alpha=\beta=k$ とすれば，$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$ であり，(＊) の変形において $\dfrac{s}{\alpha}+\dfrac{t}{\beta}=\dfrac{s+t}{k}=1$ とできる。

㈢について：

$s=0$ すなわち，点Pが直線 OA 上にある場合は，P＝X となる以外，P，X，Y が同一直線上にあることはなく，P は線分 (OA) 上にある場合に限られる。

同様に，$t=0$ すなわち，点Pが直線 OB 上にある場合は，P が線分 (OB) 上にある場合に限られる。

§6. 最後に

「自明」な①，②の証明に随分と時間がかかりました。実際の試験においては，今回の考え方では制限時間内に完全に解答することは困難でしょう。ただ，大学入試において，⓪を「自明」とするのは「論外」としても，①，②を「自明」とした場合，⓪と同様の「論外」となるのでしょうか？①，②の「自明」を証明するなら，どの程度の記述が要求されるでしょうか？興味のある所ではあります。

長い議論を終えて，論理的な明確性，記述 (表現) のしやすさ等を考えると，出題形式 (小問設定) に沿った存在条件による考え方の威力を改めて実感します。ただ，蛇足となりますが，これらのことから，もしも，減点されない答案作成や記述しやすい解法の指導のみが日々の授業のすべてとなってしまうとしたら…。それは非常に悲しいことであり，寂しいことだと私は思うのですが…。

《参考文献》

〔1〕 2021.2.25 実施　東京大学　入学試験問題
数学　文系　第3問／理系　第1問

(高知県　土佐高等学校)