グラフの平行移動について

伊藤　裕

§1. はじめに

2 つの 2 次関数のグラフが平行移動で一致するための必要十分条件は，最高次である x^2 の係数が一致することである，ということを数学 I で学ぶ。

最近数学 II の授業で 3 次関数のグラフを扱ったときに，2 つの 3 次関数のグラフが平行移動で一致するための必要十分条件が気になったので計算してみた。

§2. 3 次関数の場合

まず，明らかであるが，次のことに注意しておく。

2 つの 3 次関数 $y=a_1x^3+b_1x$ と $y=a_2x^3+b_2x$ のグラフが平行移動で一致するための必要十分条件は

$$a_1=a_2 \text{ かつ } b_1=b_2$$

となることである。

これは 2 つの 3 次関数の x^2 の係数が，ともに 0 であることに注意するとわかる。

3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ を立方完成すると

$$y=a\left(x+\frac{b}{3a}\right)^3+\frac{3ac-b^2}{3a}\left(x+\frac{b}{3a}\right)+\text{定数}$$

となる。定数項は y 軸方向の平行移動で 0 にできるので，3 次関数 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ のグラフは，3 次関数 $y=ax^3+\dfrac{3ac-b^2}{3a}x$ のグラフを平行移動したものであることがわかる。

すると先の注意から，2 つの 3 次関数
$y=a_1x^3+b_1x^2+c_1x+d_1$ と
$y=a_2x^3+b_2x^2+c_2x+d_2$ のグラフが平行移動で一致するための必要十分条件は

$$a_1=a_2 \text{ かつ } \frac{3a_1c_1-b_1{}^2}{3a_1}=\frac{3a_2c_2-b_2{}^2}{3a_2}$$

となる。ここで，$y'=3a_1x^2+2b_1x+c_1$ であり，2 次方程式 $y'=0$ の判別式の値が $4(b_1{}^2-3a_1c_1)$ であることから，次の結論を得る。

2 つの 3 次関数のグラフが平行移動で一致するための必要十分条件は，最高次である x^3 の係数と 2 次方程式 $y'=0$ の判別式の値がそれぞれ一致することである。

§3. おわりに

上の結論は計算した結果をただ言い換えただけではあるが，2 次方程式 $y'=0$ の判別式と関係があることが面白いと感じた。

（神奈川県立生田高等学校）