$g(x\pm y)=g(x)f(y)\pm f(x)g(y)$，$f(x\pm y)=f(x)f(y)\pm g(x)g(y)$ を満たす実数全体で微分可能な関数

伊藤（いとう）　亘央（のぶお）

§1. 大学入学共通テストの出題から

2021 年大学入学共通テストの数学ⅡＢで，関数 $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$ について，以下の正弦・余弦の加法定理に類似した等式(A)〜(D)が成り立つか否かを確かめるという問題が出題された。

$$f(\alpha-\beta)=f(\alpha)g(\beta)+g(\alpha)f(\beta) \quad \cdots\cdots\text{(A)}$$
$$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta) \quad \cdots\cdots\text{(B)}$$
$$g(\alpha-\beta)=f(\alpha)f(\beta)+g(\alpha)g(\beta) \quad \cdots\cdots\text{(C)}$$
$$g(\alpha+\beta)=f(\alpha)g(\beta)-g(\alpha)f(\beta) \quad \cdots\cdots\text{(D)}$$

実際には，この $f(x)$，$g(x)$ は以下の等式①〜④を満たすことが確かめられる。

$$g(x+y)=g(x)f(y)+f(x)g(y) \quad \cdots\cdots①$$
$$g(x-y)=g(x)f(y)-f(x)g(y) \quad \cdots\cdots②$$
$$f(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y) \quad \cdots\cdots③$$
$$f(x-y)=f(x)f(y)-g(x)g(y) \quad \cdots\cdots④$$

共通テストの問題の正解は(B)で，③に相当する。①〜④は一見，正弦・余弦の加法定理として，$f(x)=\cos x$，$g(x)=\sin x$ を連想するが，③，④における右辺の符号が異なっている。

では，等式①〜④を満たす関数 $f(x)$，$g(x)$ は一般にはどのような関数になるのか。本稿では等式①〜④を満たす関数 $f(x)$，$g(x)$ を $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$ の場合と同様に，実数全体で微分可能な関数として考察する。

なお，正弦・余弦の加法定理が適用される③，④の右辺の符号を変えた形についての考察は，数研通信 79 号で論じているので参照されたい。

§2. ①〜④の必要条件

まず，①〜④の必要条件を考える。

明らかに $f(x)=g(x)=0$ の場合がある。

以下，$f(x)=g(x)=0$ ではないとする。

$x=y$ とすると，②より　$g(0)=0$ $\quad\cdots\cdots⑤$

④より　$f(0)=\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2$ $\quad\cdots\cdots⑥$

$x=0$ とすると，①，⑤より，$g(y)=f(0)g(y)$

③，⑤より，$f(y)=f(0)f(y)$

“常に $f(y)=g(y)=0$” ではないから，

$f(0)=1$ $\quad\cdots\cdots⑦$

⑥，⑦より，$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=1$ $\quad\cdots\cdots⑧$

また，$x=0$ として②，⑤，⑦より，

$g(-y)=-g(y)$

④，⑤，⑦より，$f(-y)=f(y)$

よって，関数 $f(x)$ は偶関数，関数 $g(x)$ は奇関数であることがわかる。

⑧より，$\{f(x)+g(x)\}\{f(x)-g(x)\}=1$

これより，$f(x)+g(x)$ と $f(x)-g(x)$ は常に互いに逆数の関係になっているから，決して 0 にはならない関数 $\phi(x)$ が存在して，$f(x)+g(x)=\phi(x)$，$f(x)-g(x)=\dfrac{1}{\phi(x)}$ と表せる。

これより

$$f(x)=\frac{\phi(x)+\dfrac{1}{\phi(x)}}{2},\quad g(x)=\frac{\phi(x)-\dfrac{1}{\phi(x)}}{2}$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ は実数全体で微分可能としているから，関数 $\phi(x)$ も実数全体で微分可能，従って “連続” であるが，常に $\phi(x)\neq 0$ で，⑤，⑦より $\phi(0)=1$（>0）であるから，常に $\phi(x)>0$ ということになる。また，$f(x)$ が偶関数，$g(x)$ が奇関数であることから，

$$\phi(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)-g(x)=\frac{1}{\phi(x)}$$

より $\phi(-x)=\dfrac{1}{\phi(x)}$ である。

以上をまとめると，$f(x)=g(x)=0$ の場合を除いた，実数全体で微分可能な関数としての $f(x)$，$g(x)$ における①〜④の必要条件は

$$(*)\begin{cases} f(x)=\dfrac{\phi(x)+\dfrac{1}{\phi(x)}}{2},\ g(x)=\dfrac{\phi(x)-\dfrac{1}{\phi(x)}}{2} & \cdots\cdots⑨ \\ \phi(x)\text{ は実数全体で微分可能な正値関数で,} & \\ \phi(-x)=\dfrac{1}{\phi(x)} & \cdots\cdots⑩ \end{cases}$$

である。

§3. 十分性の考察

逆に，§2の最後の（＊）の関数 $\phi(x)$ が具体的にどのような関数であれば，関数 $f(x)$，$g(x)$ は①〜④を満たすのか。実数全体で微分可能な正値関数としての $\phi(x)$ の十分性を調べる。

⑨について

$$①\text{の左辺}=\frac{\phi(x+y)-\dfrac{1}{\phi(x+y)}}{2}$$

①の右辺

$$=\frac{\phi(x)-\dfrac{1}{\phi(x)}}{2}\cdot\frac{\phi(y)+\dfrac{1}{\phi(y)}}{2}+\frac{\phi(x)+\dfrac{1}{\phi(x)}}{2}\cdot\frac{\phi(y)-\dfrac{1}{\phi(y)}}{2}$$

$$=\frac{\phi(x)\phi(y)-\dfrac{1}{\phi(x)\phi(y)}}{2}$$

よって

$$\phi(x+y)-\frac{1}{\phi(x+y)}=\phi(x)\phi(y)-\frac{1}{\phi(x)\phi(y)} \quad\cdots\cdots⑪$$

$$②\text{の左辺}=\frac{\phi(x-y)-\dfrac{1}{\phi(x-y)}}{2}$$

②の右辺

$$=\frac{\phi(x)-\dfrac{1}{\phi(x)}}{2}\cdot\frac{\phi(y)+\dfrac{1}{\phi(y)}}{2}-\frac{\phi(x)+\dfrac{1}{\phi(x)}}{2}\cdot\frac{\phi(y)-\dfrac{1}{\phi(y)}}{2}$$

$$=\frac{\dfrac{\phi(x)}{\phi(y)}-\dfrac{\phi(y)}{\phi(x)}}{2}$$

よって

$$\phi(x-y)-\frac{1}{\phi(x-y)}=\frac{\phi(x)}{\phi(y)}-\frac{\phi(y)}{\phi(x)} \quad\cdots\cdots⑫$$

$$③\text{の左辺}=\frac{\phi(x+y)+\dfrac{1}{\phi(x+y)}}{2}$$

③の右辺

$$=\frac{\phi(x)+\dfrac{1}{\phi(x)}}{2}\cdot\frac{\phi(y)+\dfrac{1}{\phi(y)}}{2}+\frac{\phi(x)-\dfrac{1}{\phi(x)}}{2}\cdot\frac{\phi(y)-\dfrac{1}{\phi(y)}}{2}$$

$$=\frac{\phi(x)\phi(y)+\dfrac{1}{\phi(x)\phi(y)}}{2}$$

よって

$$\phi(x+y)+\frac{1}{\phi(x+y)}=\phi(x)\phi(y)+\frac{1}{\phi(x)\phi(y)} \quad\cdots\cdots⑬$$

$$④\text{の左辺}=\frac{\phi(x-y)+\dfrac{1}{\phi(x-y)}}{2}$$

④の右辺

$$=\frac{\phi(x)+\dfrac{1}{\phi(x)}}{2}\cdot\frac{\phi(y)+\dfrac{1}{\phi(y)}}{2}-\frac{\phi(x)-\dfrac{1}{\phi(x)}}{2}\cdot\frac{\phi(y)-\dfrac{1}{\phi(y)}}{2}$$

$$=\frac{\dfrac{\phi(x)}{\phi(y)}+\dfrac{\phi(y)}{\phi(x)}}{2}$$

よって

$$\phi(x-y)+\frac{1}{\phi(x-y)}=\frac{\phi(x)}{\phi(y)}+\frac{\phi(y)}{\phi(x)} \quad\cdots\cdots⑭$$

⑪，⑬より

$$\phi(x+y)=\phi(x)\phi(y) \quad\cdots\cdots⑮$$

⑩，⑫，⑭より

$$\phi(x-y)=\phi(x)\phi(-y) \quad\cdots\cdots⑯$$

明らかに⑮と⑯は同値であるから，⑮のみに着目し，この後は関数 $\phi(x)$ を，⑮を満たす実数全体で微分可能な正値関数として具体的に調べる。

k を任意の実数として $\phi'(0)=k$ とする。導関数 $\phi'(x)$ は

$$\begin{aligned}\phi'(x)&=\lim_{h\to0}\frac{\phi(x+h)-\phi(x)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{\phi(x)\phi(h)-\phi(x)}{h}\quad(\because\ ⑮)\\&=\lim_{h\to0}\phi(x)\frac{\phi(h)-\phi(0)}{h-0}\quad(\because\ \phi(0)=1)\\&=\phi'(0)\phi(x)=k\phi(x)\end{aligned}$$

常に $\phi(x)\neq0$ であるから

$$\frac{1}{\phi(x)}\cdot\frac{d}{dx}\phi(x)=k$$

この両辺を x で積分すると

$$\int\frac{1}{\phi(x)}\cdot\frac{d\phi(x)}{dx}dx=\int k\,dx$$

$$\int\frac{1}{\phi(x)}d\phi(x)=\int k\,dx$$

常に $\phi(x)>0$ であるから

$$\log\{\phi(x)\}=kx+l \quad (l\text{ は任意定数})$$

$$\phi(x)=e^{kx+l}=e^l e^{kx}$$

ところが，$\phi(0)=1$ より，$e^l=1$ つまり $l=0$

よって　$\phi(x)=e^{kx}$

ここで，$e^k=a$ とおくと，$\phi(x)=a^x$ と表せる。定数 a は任意の正数であるが，$a=1$ の場合を除けば指数関数になり，$a=1$ の場合は，$\phi(x)=1$ で，$f(x)=1$，$g(x)=0$ である。

結局，⑮を満たす実数全体で微分可能な正値関数としての $\phi(x)$ は，

$$\phi(x)=a^x \quad (a\text{ は任意正数})$$

である。

以上より，(＊) における関数

$$f(x)=\frac{\phi(x)+\dfrac{1}{\phi(x)}}{2},\quad g(x)=\frac{\phi(x)-\dfrac{1}{\phi(x)}}{2}$$

が①～④を満たすのは，$\phi(x)=a^x$ (a は任意正数) のときである。

§4. 結　論

本稿をまとめる。

4つの等式

$g(x+y)=g(x)f(y)+f(x)g(y)$ ……①

$g(x-y)=g(x)f(y)-f(x)g(y)$ ……②

$f(x+y)=f(x)f(y)+g(x)g(y)$ ……③

$f(x-y)=f(x)f(y)-g(x)g(y)$ ……④

を満たす，実数全体で微分可能な関数 $f(x)$，$g(x)$ は，以下のようになる。

◎　$f(x)=g(x)=0$

◎　$f(x)=1$，$g(x)=0$

◎　$f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$，$g(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$ $(a>0,\ a\neq 1)$

なお，2021 年大学入学共通テスト数学ⅡＢでは，上の $a=2$ の場合が適用されたということである。

《参考文献》

〔１〕 2021 年 大学入学共通テスト 数学ⅡＢ

(愛知県　名古屋国際中学校・高等学校)