接線の方程式から接点を求める

細木　翔太

§1. はじめに

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　$x_1x+y_1y=r^2$

数Ⅱの「図形と方程式」の分野で学ぶ重要な公式であるが，この公式の使われ方がいささか不十分な気がしてならない。というのも，教科書や問題集の練習問題では，「接点Pが与えられて，接線を求める」という向きの問題しかないのである。「接線の方程式から，接点Pを求める」という強力な使われ方は，もう少し一般的になってもよいのではないかと感じ，今回投稿させていただいた。

§2. 具体例1

円 $x^2+y^2=1$ ……① と直線 $y=mx+2$ ……② が接するとき，定数 m の値と接点の座標を求めよ。

この問いに対して，一般的な解法は次のようなものである。

【一般的な解答1】

$x^2+y^2=1$ と $y=mx+2$ から y を消去して整理すると　$(m^2+1)x^2+4mx+3=0$

この2次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(2m)^2-3(m^2+1)=m^2-3$$

円と直線が接するのは，$D=0$ のときである。

よって，$m^2-3=0$ より　　$m=\pm\sqrt{3}$

$m=\sqrt{3}$ のとき

$$x=-\frac{4m}{2(m^2+1)}=-\frac{4\sqrt{3}}{2\cdot4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$y=mx+2$ に代入して　$y=\dfrac{1}{2}$

$m=-\sqrt{3}$ のとき

$$x=-\frac{4m}{2(m^2+1)}=-\frac{4\cdot(-\sqrt{3})}{2\cdot4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$y=mx+2$ に代入して　$y=\dfrac{1}{2}$

よって，$m=\sqrt{3}$ のとき接点の座標は $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

$m=-\sqrt{3}$ のとき接点の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

次に示す「点と直線の距離の公式」を用いる解答も一般的である。

【一般的な解答2】

円①の中心と，直線②の距離が円①の半径に等しいときを考えて

$$\frac{|2|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \qquad \text{よって}\quad m=\pm\sqrt{3}$$

………

このあと，接点の座標をどう求めるかを生徒に問うと，「①と $y=\pm\sqrt{3}\,x+2$ の連立方程式を解く」と答える生徒ばかりである。間違ってはいないのだが，やや面倒である。

そこで，次のように考えてみてはどうか。

円 $x^2+y^2=r^2$ の接線の方程式が $ax+by=r^2$ のとき，接点の座標は $(a,\ b)$ である。

【一般的な解答2の続き】

$m=\sqrt{3}$ のときの②は

$y=\sqrt{3}\,x+2$，すなわち $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y=1$

であるから，接点の座標は $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

$m=-\sqrt{3}$ のときの②は

$y=-\sqrt{3}\,x+2$，すなわち $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}y=1$

であるから，接点の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$

接線の方程式を $ax+by=r^2$ の形に変形するところがポイントである。この考え方を用いて，別の解答を作成してみる。

【一般的になってほしい解答】

②より　$-\frac{m}{2}x+\frac{1}{2}y=1$　……③

③が，円①の接線になるのは，$\mathrm{P}\left(-\frac{m}{2},\ \frac{1}{2}\right)$が円①上にあるとき，すなわち $\left(-\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$ が成り立つときである。これを解くと　$m=\pm\sqrt{3}$

よって，$m=\sqrt{3}$ のとき接点の座標は$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

$m=-\sqrt{3}$ のとき接点の座標は$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

この考え方を応用させると，円と直線の共有点の個数も次のように議論できる。

③が，円①と異なる2点で交わるのは，

$\mathrm{P}\left(-\frac{m}{2},\ \frac{1}{2}\right)$が円①の内部にあるとき，すなわち

$\left(-\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2<1$ が成り立つときである。

これを解くと　$-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$

③が，円①と共有点をもたないのは$\mathrm{P}\left(-\frac{m}{2},\ \frac{1}{2}\right)$が円①の外部にあるとき，すなわち

$\left(-\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2>1$ が成り立つときである。

これを解くと　$m<-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<m$

§3. 具体例1のまとめ

円 $C：x^2+y^2=r^2$ と直線 $\ell：ax+by=r^2$ に対して，点$\mathrm{P}(a,\ b)$を考える。
円Cと直線ℓが異なる2点で交わるのは
点Pが円Cの内部にあるとき，
すなわち　$a^2+b^2<r^2$ のときである。
円Cと直線ℓが接するのは
点Pが円C上にあるとき，
すなわち　$a^2+b^2=r^2$ のときである。
円Cと直線ℓが共有点をもたないのは
点Pが円Cの外部にあるとき，
すなわち $a^2+b^2>r^2$ のときである。

§4. 楕円への応用

楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$における接線の方程式は $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$

これも，次のように考えられる。

楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ の接線の方程式が
$\frac{cx}{a^2}+\frac{dy}{b^2}=1$ のとき，接点の座標は$(c,\ d)$である。

このことを用いて，楕円に引いた接線の方程式に関する問題の解答を作成する。

点$\mathrm{A}(0,\ 4)$から楕円 $C：\frac{x^2}{4}+y^2=1$ に接線を引くとき，接点の座標と接線の方程式を求めよ。

【解答】

点Aを通る接線は，x軸に垂直ではないから，その方程式は $y=mx+4$　……①　とおける。

①を変形して　$-\frac{m}{4}x+\frac{1}{4}y=1$

これが楕円Cの接線の方程式となるのは，

点$\mathrm{P}\left(-m,\ \frac{1}{4}\right)$が楕円$C$上にあるとき，すなわち

$\frac{(-m)^2}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2=1$ が成り立つときである。

これを解くと　$m=\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

よって，接点の座標が$\left(-\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{1}{4}\right)$のとき

接線の方程式は $y=-\frac{\sqrt{15}}{2}x+4$

接点の座標が$\left(\frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{1}{4}\right)$のとき

接線の方程式は $y=\frac{\sqrt{15}}{2}x+4$

§5. おわりに

「接線の方程式から，接点Pを求める」という考え方は，生徒にも好評であり，「式を読む力」を養うこともできる。

今回の投稿では，楕円に応用したが，もちろん双曲線や放物線にも応用がきく。2次曲線は接点と接線が1対1に対応していることが強い。

この考え方が市民権を得て，教科書や参考書に当然のように掲載されることを願っている。

（埼玉県立蕨高等学校）