長方形の用紙を折ることで学ぶ三角関数の合成
～長辺を 2 通りに表すことから～

にしもと　のりよし
西元　教善

§1. はじめに

数年前に，直線 ℓ 上にない点Aと直線 ℓ に関して対称な点Bの座標を求める問題を扱うとき，長方形の用紙(A4 判)を使って，「折る」，「元に戻す」，「書き込む」という作業を通じて，抽象的な内容を具現化するアクティブラーニングを行ったことがある。

何を使って，どのように解くのかを考える以前に，A，B，ℓ に成り立つ数学的事実をわからせるため，用紙を折って元に戻し，そこに残る痕跡を数学的に考えさせ，教科書では当たり前のこととして扱っていることを確認して本題に入ったわけである。

教科書では，三角関数の合成　つまり

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ $\left(\text{ただし，}\alpha\right.$ は $\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ $\left.\text{を満たす角}\right)$ は三角関数の加法定理を使って次のように説明されている。

$a\sin\theta+b\cos\theta$　この時点で「？」の生徒が多い。どうしてそうなるの？，何のための変形？

$=\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\theta\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

$=\sqrt{a^2+b^2}(\sin\theta\cos\alpha+\cos\theta\sin\alpha)$

加法定理を覚えていない生徒
または，あやふやな生徒は「？」

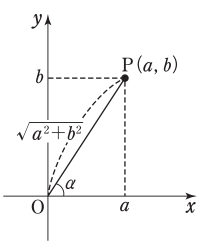
$=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

数学的には至極当然の流れであるが，わかりにくい生徒が多いようである。

角 α については，教科書では大概右の図が添えられているが，α が

$\cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$\sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$



を満たす角ということが十分に理解できているのであろうか。

α の意味は図と三角関数の定義からわかるが，この図では角 $\theta+\alpha$ について，さらには等式 $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ の全体的な図的意味はわからない。そこで，$a\sin\theta$，$b\cos\theta$，$a\sin\theta+b\cos\theta$, $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$, $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ の意味が，見れば納得できるような図を生徒に提示することで，「三角関数の合成」の理解と定着が高められると考えた。

本稿では，長方形の用紙を使って(書き込んだり，それを折ったり，元に戻したり，また，そこに三角比を見出したりして)三角関数の合成の図的意味の理解を図る考察を行う。

§2. 長方形の用紙(A4 判)を折る

まず，長方形の用紙(A4 判縦長)を用意し，次の手順で書き込んだり，折ったり，元に戻したりする。

手順

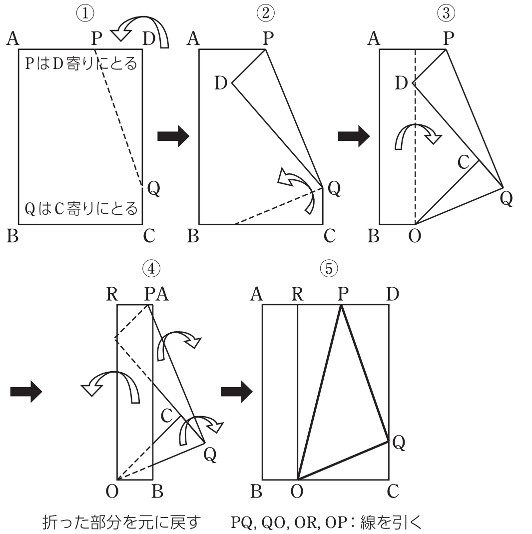
① 長方形の用紙(A4 判でも B5 判でも構わない)を生徒に配布して，縦長の状態に置かせ，図のように頂点 A，B，C，D を書かせる。辺 AD 上の D 寄りに点 P を書かせる。
(AP：PD＝2：1 程度がよい。)
また，辺 DC 上の C 寄りに点 Q を書かせる。
(これも DQ：QC＝2：1 ぐらいがよい。)
次に，PQ を折り目として図 2 のように折る。

② 図③のように，C が DQ 上にくるように折って，折り目と BC の交点を O とする。

③ 図④のように，OR を折り目として A が RP にくるように折る。

④ 図⑤のように，折った部分を戻して，元の長方形の状態にする。

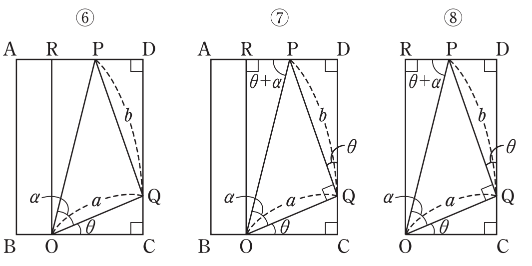
⑤　折り目 PQ，QO，OR，OP について鉛筆等で直線を引く。



§3. 三角関数の合成 $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ を示すための準備

⑥　⑤で得られたものに，図⑥のように，次のことを書き込む。
$OQ=a$，$PQ=b$，$\angle QOC=\theta$，$\angle POQ=\alpha$
$\angle QCO$，$\angle PDQ$ の所に直角の記号(∟)

⑦　図③を利用して $\angle PQO=90^\circ$ であることを確認させて，$\angle PQO$ の所に直角の記号(∟)を書かせる。また，$\angle DRO=90^\circ$ であるから
$\angle DRO$ の所にも直角の記号(∟)を書かせる。
　さらに，$\angle RPO=\theta+\alpha$ であること(錯角より)を確認させ，$\angle RPO$ の所に $\theta+\alpha$ を書かせる。
　また，$\angle PQD=\theta$ であること($\theta+\angle OQD=\angle OQD+\angle PDQ=90^\circ$ より)を確認させ，
$\angle PQD$ の所に θ を書かせる。(図⑦)



⑧　ここで，長方形 ROCD に着目させる(図⑧，OR で切り離してもよい)。これで準備完了である。

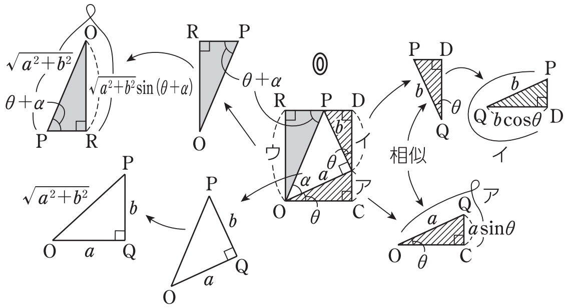
そこで，次の質問をする。

質問1　CQ，DQ，OP，OR を a，b，θ，α (sin，cos，$\sqrt{\ \ }$)を使って表せ。

質問2　$OR=CQ+DQ$ (長方形の向かい合う辺の長さは等しい)からどのような等式が成り立つと言えるか。

§4. 三角関数の合成 $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ の図的証明

【質問1，2の解答】　図⑧において
斜辺 $OQ=a$，$\angle QOC=\theta$，$\angle OCQ=90^\circ$ である直角三角形 OCQ から，高さ $CQ=a\sin\theta$
斜辺 $PQ=b$，$\angle PQD=\theta$，$\angle PDQ=90^\circ$ である直角三角形 PQD から，底辺 $QD=b\cos\theta$
$OQ=a$，$PQ=b$，$\angle PQO=90^\circ$ である直角三角形 PQO から，斜辺 $OP=\sqrt{a^2+b^2}$
斜辺 $OP=\sqrt{a^2+b^2}$，$\angle OPR=\theta+\alpha$，$\angle PRO=90^\circ$ である直角三角形 PRO から，
高さ $OR=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ である。以上から
　$CQ=a\sin\theta$，$DQ=b\cos\theta$，$OP=\sqrt{a^2+b^2}$，
$OR=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ (書き込ませる)
　また，$CQ+DQ=OR$ より，
$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ である。

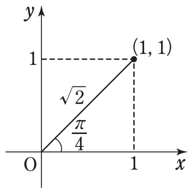


ア ＋ イ ＝ ウ
$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$

§5. $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ について

　標記の等式は，$\sin\theta+\cos\theta=1\sin\theta+1\cos\theta$ より，次の図を描いて $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ と答えることが多い。

$\sqrt{a^2+b^2}$ は原点Oと点P$(a,\ b)$ の距離 OP であり，$\alpha=\angle \mathrm{PO}x$ であるから，このような説明で十分である。

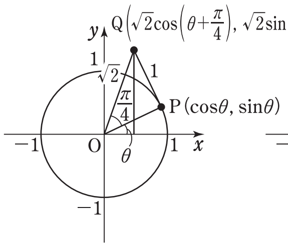


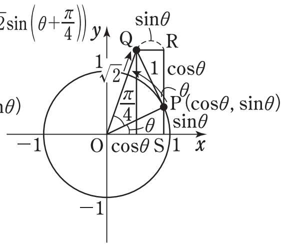
しかし，依然として

$$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

の意味はよくわかっていない，納得できていないことが多い。やり方の暗記と機械的な処理にすぎない「用具的理解」はあるが「関係的理解」はないという状態であることも多い。

§4 までの考察では三角関数の基本である「単位円」は出ておらず座標平面上での考察ではない。そこで，座標平面上での図的な説明を試みてみよう。





左の図は，第１象限にある単位円周上に点Pをとり，$\angle \mathrm{PO}x=\theta$ とすると P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ であること，点Qを $\angle \mathrm{QO}x=\theta+\dfrac{\pi}{4}$，$\mathrm{OQ}=\sqrt{2}$ であるようにとると，Q$\left(\sqrt{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right),\ \sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$ であることを示している。

一方，右の図は，P を通り y 軸に平行な直線とQを通り x 軸に平行な直線の交点を R，PR と x 軸の交点をSとすると§2〜§4と同様にすることで，$\mathrm{PQ}=\cos\theta$，$\mathrm{PS}=\sin\theta$ より $\mathrm{RS}=\sin\theta+\cos\theta$ となり，Qの y 座標が $\mathrm{RS}=\sin\theta+\cos\theta$ であることを示している。

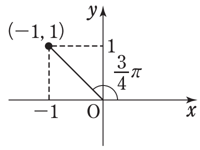
したがって，$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ である。

なお，Qの x 座標に着目すると

$$\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

であることがわかる。これは

$$\begin{aligned}
&\cos\theta-\sin\theta\\
&=-\sin\theta+\cos\theta\\
&=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{3}{4}\pi\right) \quad \leftarrow\\
&=\sqrt{2}\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}\\
&=\sqrt{2}\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\theta\right) \quad \leftarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta\\
&=\sqrt{2}\cos\left\{-\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right\}\\
&=\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \quad \leftarrow \cos(-\theta)=\cos\theta
\end{aligned}$$



のように「三角関数の合成」を使って示せる。(生徒に証明させるとよい。)

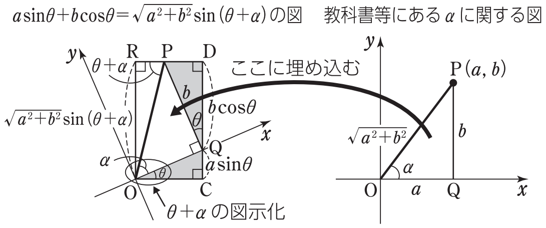
また，P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を原点Oの周りに $\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転し，原点からの距離を $\sqrt{2}$ にした点をQとするとき，Q の y 座標 $\sqrt{2}\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ はPの x 座標と y 座標の和 $\sin\theta+\cos\theta$ に等しいということである。

§6. まとめ

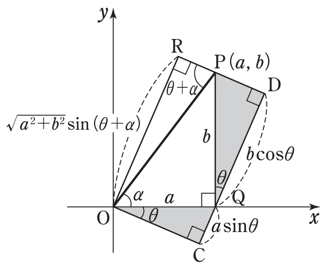
三角関数の加法定理を基に「三角関数の合成の公式」を導くのであれば§1で行った方法になるが，この証明が納得できる生徒とそうでない生徒がいる。そうでない生徒のために線分の長さが等しくなる状態(situation)から「三角関数の合成の公式」を納得させようと思った。その状態を「用紙を折ってできる折れ線跡」で作ったわけである。

確かに，一般角で成り立つことを示したわけではないので，三角関数としては不十分な説明であるが，三角関数の合成(合成：２つ以上のものをまとめて１つにすること)の図的な意味，つまり，長方形の向かい合う２つの長辺は等しく，一方の長辺は $a\sin\theta$ と $b\cos\theta$ の和として表され，他方の長辺は $\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$ として表されているので，$\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)=a\sin\theta+b\cos\theta$ であることがわかるであろう。

また，角 α についての意味は教科書の図でわかるが，これは θ との関係，つまり $\theta+\alpha$ としての意味がわかる図ではない。実際，その図には角 θ はない。それに対して，次の図を提唱したいと思う。その図に「折り紙」のイメージが伴えばこのアクティブラーニングの意義が認められるであろう。



三角関数の合成 $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$
の視覚的理解図



（山口県立光高等学校）