正弦定理の学習
～折り紙を使って sin 105°，sin 15° を求めよう！～

木尾（きお）　直子（なおこ）

§0. はじめに

準備するもの

大きい折り紙１枚

小さい折り紙１枚　$\left(\text{大きい折り紙の}\ \dfrac{1}{4}\ \text{サイズ}\right)$

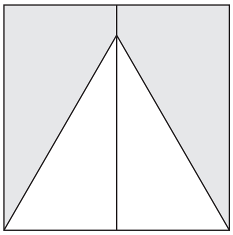
指示内容

①小さい折り紙を使って，45°，45°，90° の直角三角形を２個作る。

②大きい折り紙を使って，30°，60°，90° の直角三角形を２個作る。

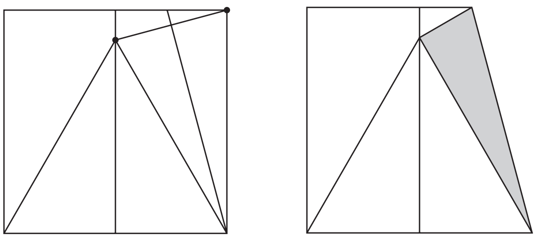
注１：ただし，①，②は同じ大きさで指示されたように２個ずつ作ることとする。

注２：大きい折り紙の切り方です。



§1. 準備

大きい折り紙を折る際に，どのように折れば上の形が出来るのか，少し発想が必要である。勿論，正方形と正三角形の１辺が同じ長さであることに気づけば，印を付けた２点が重なるように折ればよいことがわかる。

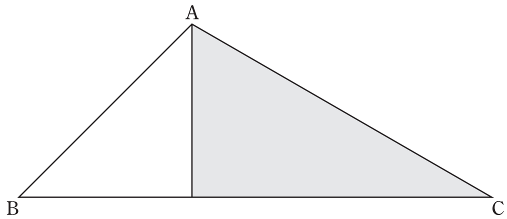


§2. 活動

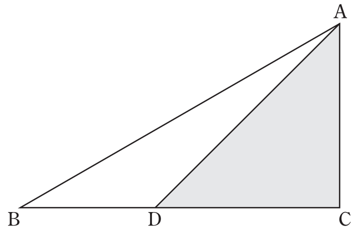
準備後，課題を２問与えた。切った折り紙をプリントにそのまま，貼付させた。

課題 1.　sin 105° を求めよう。

下図のように２個の直角三角形を繋げると，∠A が 105° であることは容易にわかる。以下，小さい折り紙の１辺の長さを１とすると，$AB=\sqrt{2}$，$BC=1+\sqrt{3}$，$CA=2$ であるから，正弦定理を利用して，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sin 105^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$ を解けば，sin 105° の値が，$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ であることが求まる。



課題 2.　sin 15° を求めよう。



これもこのように重ねれば，$\angle BAD=15^\circ$ であること，$AB=2$，$BD=\sqrt{3}-1$，$DA=\sqrt{2}$ であり，$\angle B=30^\circ$，$\angle BDC=135^\circ$ であることは容易に求められる。

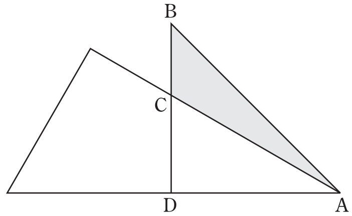
結果，△ABD において，正弦定理を利用して

$\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sin 15^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$ を解けば，sin 105° の値が，

$\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ であることが求まる。

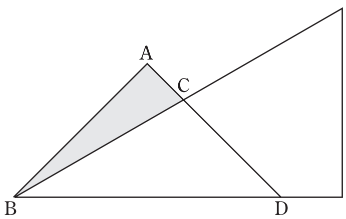
この学習は，生徒が容易に 105°，15° を発見しやすいように，2 組の直角三角形を作成させるところがポイントである。
課題 2 では 15° を出す方法が他にもあることから，別解が出る面白さもある。

例えば，以下は生徒の出した別解である。



$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$，$\mathrm{CD}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\mathrm{BC}=1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\angle\mathrm{BAC}=15^\circ$，$\angle\mathrm{BCA}=120^\circ$ であることから，△ABC において，正弦定理を利用して

$\dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{\sin 15^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 120^\circ}$ と立式すれば，同じように解が出せる。また，次の図も生徒の考えた図である。



これは若干難しい。$\dfrac{\mathrm{CD}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 105^\circ}$

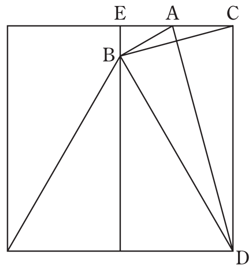
$\mathrm{CD}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}-1$ となる。

このことから，△ABC において，正弦定理を利用して

$$\frac{1-(\sqrt{3}-1)}{\sin 15^\circ}=\frac{1}{\sin 75^\circ}$$

また，ここで $\sin 75^\circ=\sin 105^\circ$ であることを利用すると，$\sin 15^\circ=(2-\sqrt{3})\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ を計算すれば同じ結果が出せる。

さらに，今回は余弦定理を使う方法は利用しなかったが，折り紙を折った線と余弦定理を利用しても，求めることができる。

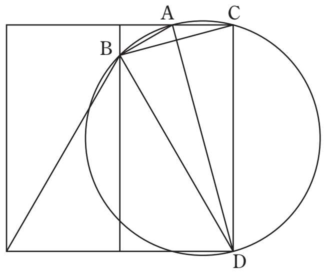


例えば，BE の長さは $2-\sqrt{3}$ より　$\mathrm{AB}=4-2\sqrt{3}$
△BCD において，余弦定理を利用して

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=4+4-8\cos 30^\circ\\&=8-4\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\mathrm{BC}>0$ より　$\mathrm{BC}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$
△ABC において，正弦定理を利用して
$\dfrac{4-2\sqrt{3}}{\sin 15^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sin 150^\circ}$ とすればよい。

また，この図には他にも別解がある。



折り紙の折り方から，∠ABD，∠ACD が直角，そのことより AD が直径であることに気づけば，直径を求めて，その後 △ABD において，正弦定理を利用して

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin 15^\circ}=\mathrm{AD}=2R$$

とすれば，求まることがわかる。

§3. 最後に

やはり，折り紙は楽しいと実感した。

生徒からの感想も三角形の組み合わせの面白さを感じたとの感想が多く寄せられた。

《参考文献》

〔1〕 改訂版 新編 数Ⅰ「主体的・対話的で深い学び」への参考資料 ～アクティブ・ラーニング型授業サポートブック～　数研出版
p.76 の課題 2 を見て思いついたが，折り紙を使うところなどは完全オリジナルです。

（岡山県立岡山南高等学校）