GeoGebra シミュレーションコンテンツ集（ICT 活用）

村上　仙瑞

§1. GeoGebra について

GeoGebra というフリーソフトをご存じでしょうか。このフリーソフトは数学のいろいろな単元に汎用性がとても高く，少し学習しただけで簡単に生徒の理解度を促すインタラクティブなシミュレーションコンテンツを作ることができる。シミュレーションがあるとやはり生徒の理解度は格段に違う。今回すべてを紹介することは難しいので，このレポートでは授業中に使ってきた中で，私自身オススメなもの，生徒の反応が良かったもの，生徒から依頼のあったものを厳選して作成のポイントを示しながら解説する。HP に整理した順番に紹介する（中学の内容も含む）。GeoGebra のよいところは，ネットで公開できて，コンテンツを共有でき，しかもタッチパネル対応でスマホでもシミュレーションができるという至れり尽くせりのソフトである。

百聞は一見にしかず。私がいままで作った GeoGebra コンテンツを私自身のサイト（http://essential-math.main.jp/visitors/geogebrahp/）にまとめている。

§2. 平面図形

最短距離　中 1 の幾何で学ぶ有名な最短距離の問題。生徒にタブレット導入されたことによって，各自でシミュレーションができるようになりグループ学習を行った。

円周率を求めるシミュレーション　生徒からよくなぜ円周率が 3.14 なのですかと質問を受ける。円に内接する多角形と外接する多角形を挟んで近似するシミュレーションを作った。

三角不等式（三角形ができる辺の長さの条件）　生徒から，「△ABC において三角不等式 $c-b<a$ が成り立たなければならない」というイメージがわかないという申し出から作成した。

§3. 空間図形

立方体の断面図　立方体の 3 点を自由に動かして切断面を考えることのできるシミュレーション。

§4. 1 次関数

1 次関数の応用（動点が作る三角形の面積とグラフ）　三角形の面積の変化の様子が台形の形になる有名な 1 次関数の応用問題。実際に点が動いて，それと同時にグラフが現れるように作成した。

2 元 1 次方程式のグラフ（x＝定数，y＝定数）　まず生徒に「x＝定数」の形が方程式であるというところから説明しないといけない。グラフで表すにしても，この形のままではそれぞれ y や x の値がなく座標平面に点をとることすらできない。そこで，たとえば $x=3$ のグラフであれば，$x+0\times y=3$ とかきなおした式をヒントで用意してどのように解が配置されていくかをアニメーション化した。生徒の理解度は格段に上がった。

§5. 2 次関数

2 次関数の応用制動距離のシミュレーション　制動距離イメージがわかないとの依頼から作成した。作成ポイントとしては，速度を自由に変えることができて，静止した距離をグラフにプロットして 2 次曲線になるというシミュレーションができるように作成した。

§6. 高校の２次関数

定義域が動く（１カ所）２次関数の最大最小　定義域の端を動かすことによって，グラフの最大，最小という文字が連動して動いて生徒の理解を促すことができた。

板を折り曲げる　２次関数　生徒から板を折り曲げてできる溝の面積が変化していくというイメージがわかないという申し出を受けて作成した。

§7. 三角比

単位円とタンジェント（tan）　三角比の値，特にタンジェントの不等式は，GeoGebraのコンテンツがあるかどうかでかなりの理解度が変わってくる。

単位円で三角比を定義したときの座標のイメージ
単位円でコサインやサインを表したとき，コサインは単位円のx座標，サインは単位円のy座標になるというシミュレーション。特に三角定規の有名角関連のところは，分数・根号表示になるように作成した。また単位円上の点に連動して角度の表記も変化していくように作成した。

正弦定理の証明アニメーション　三角形に外接円を描き頂点を移動して外接円の半径を使うという流れはなかなかイメージがわきにくい。その一連の流れをアニメーション化した。

§8. 平面ベクトル

私が力を入れた分野である。ベクトルが始点から終点まで伸びるようにアニメーションを作って，ベクトルは方向と大きさをもっているということを生徒に意識させるように工夫した。また**ベクトルは平面のどこに点があっても，始点がどこにあっても式が成り立つということを理解させるために，点を自由に動かしても成り立つようなコンテンツ作りに注力した。**

ベクトルの交換法則イメージアニメーション　教科書では $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ と簡単に式をかいているだけだが，この意味を本当に理解している生徒は少ない。$\vec{u}$ 方向に進んだ後，$\vec{v}$ 方向に進んだ方向と距離と，$\vec{v}$ 方向に進んだ後，$\vec{u}$ 方向に進んだ方向と距離が同じ，つまり始点と終点が同じであるという意味である。コンテンツを作ることによって生徒の理解度が格段に上がった感じがした。これを解説した後，これは空間でも成り立つのですかと質問を受けた。空間での交換法則のイメージが同時にわいていないようであった。その後空間ベクトルでも交換法則のイメージアニメーションを作った。

ベクトルの差の公式のシミュレーション
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\square\mathrm{B}}-\overrightarrow{\square\mathrm{A}}$ という公式。この公式の図形的意味をあまり理解しないまま使っている生徒が多い。□の部分が図形的にどのような意味をなしているのか，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\square\mathrm{B}}-\overrightarrow{\square\mathrm{A}}$ が等しい図形的意味を理解できるように作成した。もちろん各点は平面上を自由に動くことができる。

ベクトルの和と差の具体的な成分計算　ベクトルの和，差，実数倍の成分計算が自由に設定できる。ベクトルの成分は座標と違うということを促すためにベクトルが平面上を自由に動けるようにした。またベクトルの成分の計算結果が図形的にどのような意味をなすのか，理解を促すアニメーションを付け加えた。

内分の位置ベクトルイメージアニメーション（内分グラウンド編）　線分ABの頂点がどこにあっても，始点がどこにあっても線分ABを$m:n$に内分する点Pは，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$ で与えられるが，この形式だと図形的意味がわかりにくい。そこで，$\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と分解して表すことにして，アニメーションを付け加えることによって式の意味を図形的に理解できるようにコンテンツを作成した。そして生徒のイメージを促すためにあえて背景を学校のグラウンドにした。生徒の評判はよかった。

重心の位置ベクトルイメージアニメーション（重心グラウンド編）　三角形の頂点と始点Oは平面上を自由に動くことができる。どこに頂点があっても，どこに始点があろうとも，$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 方向に歩けば，三角形の重心にたどり着くというアニメーションを作成した。そして生徒のイメージを促すためにあえて背景を学校のグラウンドにした。

ベクトルの１次独立と１次従属のイメージシミュレーション　平行でないかつゼロベクトルでない２つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ に対して，$s\vec{a}+t\vec{b}$ が $\vec{0}$ になるのは，$s=t=0$ のときだけというシミュレーションを作った。

法線ベクトルを使って2つの直線のなす角度を求める　2つの直線のなす角度を法線ベクトルを使って求める問題。法線が動くことによって，理解を促すシミュレーションコンテンツ。もちろん直線は自由に動くことができる。

ベクトル方程式（点Pが線分AB上にある）　方程式 $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ において，点Pが線分ABにあるときと，直線AB上にあるとき，係数にどのような特徴があるかシミュレーションできるようにした。それと同時に2つのベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ がどのような大きさで動くかもわかるようなアニメーションを付け加えた。

ベクトル方程式（変数が独立して動く点の範囲）
用意された頂点はすべて自由に平面上を動く。点Pの存在範囲は，手動アニメーションで点Pの残像を残すようにして，シミュレーションできるようにした。また存在範囲の解答をチェックボタン形式にした。

§9．空間ベクトル

私が1番力を入れた分野である。空間認識が乏しい生徒が多く，きちんと理解を促すコンテンツが必要であった。特にGeoGebraの優れているところは，3次元空間を自由に回転できあらゆる方向からみることができることである。

空間座標対称点のシミュレーション　基準となる空間座標は自由に設定でき，対称は点をビジュアル的に理解できるように作成した。

座標平面に平行な平面シミュレーション　同じ $x=2$ の方程式のグラフも，平面と空間では表す図形は違う。その違いがわかるように，平面と空間を並べて表示した。

空間ベクトルの成分あり和と差のシミュレーション
ベクトルの和，差，実数倍の成分計算が自由に設定できる。ベクトルの成分は座標と違うということを促すためにベクトルが空間内を自由に動けるようにした。またベクトルの成分の計算結果が図形的にどのような意味をなすのか，理解を促すアニメーションを付け加えた。

成分を指定する2つの空間ベクトルのなす角度　2つの空間ベクトルが離れていてもベクトルのなす角度を考えることができるというコンセプトで作った。ベクトルの成分は自由に変えることができ，操作1つで始点をそろえてなす角度がわかるように作った。

2つの空間ベクトルが平行とその応用シミュレーション　2つの空間ベクトルが平行とはどういう意味か。2つのベクトルが空間内で自由に動けるようにした。

空間座標（空間ベクトル）の内分外分重心　平面ベクトル同様に，頂点，始点を自由に動かすことができて，式の意味を理解できるようにアニメーション化した。

球の方程式　半径や通る2点を自由に変更できて，応用問題も対応した。

§10．数列

図形のみでなく，数列にも応用できる。少し時間をかけると等差数列の和の公式のシミュレーションも作ることができる。

等差数列の和　等差数列の和の公式を導く説明をするとき，教科書でも反対から足して長方形を作るというイメージ図があるが，図の中に…があるのでなかなか生徒はイメージがわきにくいようだ。そこで回転すると長方形ができ，縦が項数，横が（初項＋末項）というコンテンツを作ることによってイメージを促すことができる。コンテンツは，初項，項数，公差を自由に変更できる。

§11．複素数平面

GeoGebraは複素数平面にも対応している。

複素数の和と差のイメージ　複素数の和や差はベクトルと同じイメージで考えることができる。

複素数　乗法による原点中心の回転と拡大　回転と拡大をイメージできるようなコンテンツ。角度と拡大は自由に設定できる。

複素数平面における線対称の仕組み　複素数平面での応用問題の1つとして原点を通る直線に関しての点の対称移動がある。複素数平面での点対称移動はどのような作業で行われるのか一連の流れをアニメーション化した。スタートとなる点は自由に移動できる。

点Aでの複素数のなす角度の仕組み　α，β，γ が同一直線上だったら，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ が実数になることが実感できる解説アニメーション。α，β，γ は平面上を自由に動くことができる。

§12. 2次曲線

楕円の方程式　$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ において，$a>b$，$a=b$（つまり，円），$a<b$ の場合を1つの平面で表した。a や b の点を動かすだけでいろいろな楕円の形を表現でき，しかも和が常に一定という表示をつけた。$a=b$ のときの焦点はどうなるかというシミュレーションもできる。

放物線（横）の軌跡　焦点，準線が連動して，焦点の座標を自由に変えることのできる放物線の軌跡のコンテンツ。

双曲線（x 軸と交点をもつ）　$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ において a，b の値を自由に動かすことができ，いろいろな双曲線の形を表現でき，しかも差が常に一定という表示をつけた。

離心率　1つの平面で離心率の値を変えて，2次曲線がどのように変化するかシミュレーションできる。

サイクロイド　サイクロイドの軌跡の点が動くと同時に座標が変化していく。また円弧の長さを色づけた。

§13. 微分・積分

微分の導入（接線の傾き）　h の値を0に近づけたとき2点を通る直線は，接線になるというシミュレーション。ポイントは $h \fallingdotseq 0$ の状態で $h\to 0$ ということを強調するために，$h=0$ のときは，平均変化率は存在しないが，微分係数は存在するという式を表示した。

区分求積シミュレーション　区分求積はコマンドが用意されていて，簡単に作成できる。分割する数を大きくすると上方和と下方和が近づいていくという設定にした。

§14. 微分積分学の基本定理

これは，GeoGebra のコンテンツではなく，パワーポイントで作成したコンテンツである。この機会に紙面を借りて紹介させていただきたい。数Ⅱの教科書で解説されている方法では，なぜ微分の逆算で面積を求めることができるのか理解が難しい生徒が経験上多いと感じる。なぜ積分（面積を求める）計算 $\int_a^b f(x)\,dx$ が，$f(x)$ の原始関数 $F(x)$ を使って，$F(b)-F(a)$ で求めることができるのか。**図形的意味のみで解説を試みた**。やはり積分の導入は区分求積から積分記号の意味とこの定理の歴史を説明しながらするのが一番よいと思われる。

§15. 最後に

私が公開している GeoGebra のコンテンツは断り無しで自由に使っていただいてもかまいません。ただ感想をいただけると幸いです。またコンテンツでもこういう設定だったらもっとよいかもしれないというご意見も受け付けます。よろしくお願い申し上げます。

（兵庫県　甲南高等学校・中学校）