多項式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の有用性について

仁平（にへい）　政一（まさかず）

§1. はじめに

多項式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ は数学Ⅰの因数分解のところで初めて顔を出します。

しかし，その応用について知ることになるのは数学Ⅱ以降になり，しかも飛び飛びにしか現れないので，その有用性や魅力を実感するまでには至らないように思われます。

そこで，面白い応用例や代表的な応用例などを通して，多項式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の有用性や魅力，さらに教材としての価値を伝えることが本稿の目的になります。

§2. 多項式 $x^3+y^3+z^3-3xyz$ の基本事項

これから以後，記述の簡略化のため，$x^3+y^3+z^3-3xyz$ を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ で表すことにします。

最初に $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に関する基本事項を公式として与えます。

公式 1．(i) $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$

(ii) $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$
$=\dfrac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

(iii) $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ は $x,\ y,\ z$ に関する対称式である。
すなわち，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)=\mathrm{P}(x,\ z,\ y)=\mathrm{P}(y,\ x,\ z)$
$=\mathrm{P}(y,\ z,\ x)=\mathrm{P}(z,\ x,\ y)=\mathrm{P}(z,\ y,\ x)$

(iv) $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$ ならば，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)\geqq 0$

証明はよく知られている事実なので省略します。

次に，上記公式の(ii)からただちに得られる結果を，以下利用することになりますので，定理として述べます。

定理．$x+y+z=0$ または $x=y=z$ ならば
$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)=0$（すなわち $x^3+y^3+z^3=3xyz$）

§3. 因数分解への応用

上記定理の因数分解への面白い応用例を紹介します。

例 1．次の式を因数分解せよ。

(1) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$

(2) $(a+b)^3(a-b)^3+(b+c)^3(b-c)^3$
$+(c+a)^3(c-a)^3$

(3) $(a+b-2c)^3-(2a-b-c)^3-(2b-a-c)^3$

解．(1) $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$ であるから，
定理より，与式$=3(a-b)(b-c)(c-a)$。

(2) $(a+b)^3(a-b)^3=\{(a+b)(a-b)\}^3=(a^2-b^2)^3$，
同様にして，$(b+c)^3(b-c)^3=(b^2-c^2)^3$，
$(c+a)^3(c-a)^3=(c^2-a^2)^3$。よって，
与式$=(a^2-b^2)^3+(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3$。ところで，
$(a^2-b^2)+(b^2-c^2)+(c^2-a^2)=0$ であるから，定理より
与式$=3(a+b)(b+c)(c+a)(a-b)(b-c)(c-a)$。

(3) 与式$=(a+b-2c)^3+(b+c-2a)^3+(a+c-2b)^3$，
$(a+b-2c)+(b+c-2a)+(a+c-2b)=0$ であるから，
与式$=3(a+b-2c)(b+c-2a)(a+c-2b)$。　□

上記の例のようにしていくらでも問題を作ることができます。

授業でも面白い応用例として活用できるのではないでしょうか。

3 次方程式 $x^3-1=0$ の 1 以外の解の 1 つを ω とすると，もう 1 つの解は ω^2 となります。また $\omega^2+\omega+1=0$ となります。このことと公式 1 の(i)，(iii)を利用することにより次の公式を得ることができます。

公式 2．ω を方程式 $x^3-1=0$ の 1 以外の解とするとき，次の等式が成り立つ。

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$
$$=(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$$

証明．$\omega^3=1(\omega\neq 1)$ であるから，明らかに
$y^3=y^3(\omega^2)^3$，$z^3=z^3(\omega^2)^3$，
$3xyz=3xy\omega z\omega^2=3xy\omega^2 z\omega$ である。よって，

$$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)=\mathrm{P}(x,\ y\omega,\ z\omega^2)=\mathrm{P}(x,\ y\omega^2,\ z\omega)$$

を得る。$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ は公式 1 (i)より $x+y+z$ を因数にもつから，$x+y\omega+z\omega^2$ と $x+y\omega^2+z\omega$ も因数にもつ。
よって，

$$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$$
$$=k(x+y+z)(x+y\omega+z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$$

と書くことができる。あとは定数 k を決めればよい。
恒等式であるから，$x=1$，$y=z=0$ とすると，

$$1=k\cdot 1 \text{ すなわち } k=1$$

したがって，求める等式を得る。 □

§4．3 次方程式への応用

たいていの数学Ⅱの参考書に次のような問題 (ただし係数は具体的な数字) があります。

問 1．3 次方程式 $x^3+px+q=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ の値を求めよ。
問 2．3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ の 3 つの解を α，β，γ とするとき，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ の値を求めよ。

問 1 は $\alpha+\beta+\gamma=0$ で $\alpha\beta\gamma=-q$ ですから，定理よりただちに $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3r$ が得られます。
問 2 は

$$\alpha+\beta+\gamma=-p,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q,\ \alpha\beta\gamma=-r,$$
$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

ですから，公式 1 (i)より

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-p(p^2-3q)-3r=-p^3+3pq-3r$$

と求めることができます。
次に 3 次方程式を解く話に移ります。
数学Ⅱの教科書や参考書の中で，

$$x^3+px+q=0 \text{ や } x^3+px^2+qx+r=0$$

に関する問題を見つけることができます。もちろん数学Ⅱの範囲の問題ですから方程式の係数は因数定理と除法を用いて解けるように与えられています。

ここでは公式 2 を用いて解くことを考えてみます。
最初に $x^3+px+q=0$ の場合を考えてみましょう。
この場合は $-3uv=p$，$u^3+v^3=q$ を満たす u，v を 1 組見つければ，x^3+px+q は

$$x^3+u^3+v^3-3xuv$$
$$=(x+u+v)(x+u\omega+v\omega^2)(x+u\omega^2+v\omega) \quad \cdots\cdots①$$

となりますから解を求めることができます。
ここで，u，v は常に見つけることができるかが問題として残ります。
$-3uv=p$，$u^3+v^3=q$ を満たす u，v は

$$u^3+v^3=q,\ u^3v^3=\left(-\frac{p}{3}\right)^3$$

ですから，u^3，v^3 は 2 次方程式

$$t^2-qt-\frac{p^3}{27}=0 \quad \cdots\cdots②$$

の解として得られます。あとはこれらから u，v を求めればよいので，必ず解くことができます。なお，2 次方程式②を補助方程式と呼ぶことにします。
例を挙げておきましょう。

例 2．3 次方程式 $x^3-3x+2=0$ を解け。

解．補助方程式②は

$$t^2-2t+\frac{27}{27}=0$$

となるので，$t=1$ より $u^3=v^3=1$。
よって，$u=v=1$。
したがって，①より

$$x^3-3x+2=(x+2)(x+\omega+\omega^2)(x+\omega^2+\omega)$$

となる。ところで，$\omega^2+\omega=-1$ なので，求める解は $x=1$ (重解)，-2 である。 □

次に $x^3+px^2+qx+r=0$ の場合を考えてみよう。
$x=y-\dfrac{p}{3}$ と変数変換することにより，x^2 の項が消えるので「$x^3+px+q=0$」の形の場合に帰着します。よってこの場合も係数がなんであろうと解くことができます。
例を挙げておきましょう。

例 3．3 次方程式 $x^3-9x^2+36x-48=0$ を解け。

解．$x=y+3$ を与式に代入して，y について整理すれば $y^3+9y+6=0$ となる。②より補助方程式は

$$t^2-6t-27=0$$

これより，$t=9,\ -3$。よって，$u^3=9,\ v^3=-3$ とすると，$u=\sqrt[3]{9}$，$v=-\sqrt[3]{3}$。したがって，

$$\begin{aligned}&y^3+9y+6\\&=(y+\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3})(y+\sqrt[3]{9}\,\omega-\sqrt[3]{3}\,\omega^2)\\&\qquad\times(y+\sqrt[3]{9}\,\omega^2-\sqrt[3]{3}\,\omega)\end{aligned}$$

となるから，求める解は

$$x=3+\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{9},\ 3+\sqrt[3]{3}\,\omega^2-\sqrt[3]{9}\,\omega,$$
$$3+\sqrt[3]{3}\,\omega-\sqrt[3]{9}\,\omega^2$$

である。 □

公式 2 を利用することによって，自然に 3 次方程式の一般的解法に入ることができます。通常の方法で指導した後，別解として紹介することによって，3 次方程式は係数がなんであろうと常に解くことができるという話にスムーズに入ることができるのではないでしょうか。合わせて 4 次方程式も一般に解くことができますが，5 次以上の場合は一般には解くことができない（加減乗除と根号を用いて解を表すことができない）ことなどをアーベルやガロアの話を交えて紹介することによって，数学により興味を持たせる契機の 1 つになるのではないかと考えます。

本稿を閉じるにあたって「不等式の証明」に関する話をします。

§5. 不等式の証明への応用

ここでは文字はすべて正の数とします。

公式 1 (iv) の「$P(x,\ y,\ z)\geqq 0$」よりただちに

$$x^3+y^3+z^3\geqq 3xyz \qquad \cdots\cdots③$$

が得られます。なお，等号は $x=y=z$ のときに限り成り立つことが公式 1 (ii) から分かります。

いま，$x=\sqrt[3]{a}$，$y=\sqrt[3]{b}$，$z=\sqrt[3]{c}$ とすれば，③よりただちに，3 個の数の場合の「相加平均≧相乗平均」すなわち，

$$\frac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc} \qquad \cdots\cdots④$$

が得られます。

また，$x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$，$y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{b}}$，$z=\sqrt[3]{\dfrac{1}{c}}$ とおけば，③より

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c}}$$

すなわち

$$\sqrt[3]{abc}\geqq\frac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}} \qquad \cdots\cdots⑤$$

を得ることができます。この式は（3 個の数の場合の）調和平均と呼ばれていることは周知の通りです。④と⑤から「相加平均 ≧ 相乗平均 ≧ 調和平均」すなわち

$$\frac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc}\geqq\frac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}} \qquad \cdots\cdots⑥$$

（等号は $a=b=c$ のときに限り成り立つ）

が得られます。

上記から分かるように，$P(x,\ y,\ z)\geqq 0$ を用いることによって，数学Ⅱの不等式の証明のところで不等式⑥を難なく取り上げることができるのではないかと考えます。

もう 1 つ授業で取り上げることができると思われる例を挙げておきます。

例 4．$a,\ b,\ c$ を正の数とするとき，次の不等式を証明せよ。

(1) $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geqq 9$

(2) $\dfrac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}\geqq\sqrt[3]{abc}$

解．ここでは「相加平均≧相乗平均」を使わず，$P(x,\ y,\ z)\geqq 0$ を用いて証明する。

(1) 不等式③で $x=\sqrt[3]{a}$，$y=\sqrt[3]{b}$，$z=\sqrt[3]{c}$ とすれば

$$a+b+c\geqq 3\sqrt[3]{abc}$$

また，$x=\sqrt[3]{\dfrac{1}{a}}$，$y=\sqrt[3]{\dfrac{1}{b}}$，$z=\sqrt[3]{\dfrac{1}{c}}$ とおくと

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}$$

よって，

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqq 9\sqrt[3]{abc}\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}=9$$

（等号は $a=b=c$ のときに限り成り立つ）

(2) 最初に $\sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}\geqq\sqrt[3]{abc}$ を示す。

不等式③で $x=\sqrt[3]{ab}$，$y=\sqrt[3]{bc}$，$z=\sqrt[3]{ca}$ とすれば

$$ab+bc+ca\geqq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$$

よって，

$$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geqq \sqrt[3]{abc} \quad \cdots\cdots ⑦$$

次に $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}$ を示す。

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 - \frac{ab+bc+ca}{3}$$

$$= \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \geqq 0$$

a，b，c は正の数であるから

$$\frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \quad \cdots\cdots ⑧$$

⑦と⑧から求める結果を得る。なお，等号は $a=b=c$ のときに限り成り立つ。 □

§6. おわりに

P(x，y，z) に関する応用例はもっと沢山あるかも知れませんが，本文の内容だけでも応用の面白さなどを実感できたのではないでしょうか。また，教材としての価値もあると考えます。

《参考文献》

〔1〕 春日正文編，モノグラフ 24 公式集，科学新興社。

〔2〕 矢ヶ部　巌，数Ⅲ方式ガロア理論，現代数学社。

(元茨城県立藤代高等学校)