1次不定方程式の整数解の1つを求める方法

菅谷（すがや）　円博（みつひろ）

§0. はじめに

互除法を用いた1次不定方程式の整数解の1つを求めるプログラムを作成する過程で，新しい切り口が見つかったので報告したい。

§1. 計算方法の例

互いに素な自然数 a，b ($a>b$ とする)を係数とする1次不定方程式 $ax+by=1$ の整数解の1つを求める方法を，例を使って説明する。

例　1次不定方程式 $154x+69y=1$ の整数解の1つを求める。

（解答）　互除法より

$154=69\cdot2+16$　から　$154-69\cdot2=16$

$69=16\cdot4+5$　から　$69-16\cdot4=5$

$16=5\cdot3+1$　から　$16-5\cdot3=1$

$a=154$，$b=69$ として，2数と，互除法に出てくる余りの数の

154，69，16，5，1

を a，b を用いて表していく。

	$a=\underline{154}$	……①
	$b=\underline{69}$	……②
互除法から	$a-2b=\underline{16}$	……③
③×4	$4a-8b=16\cdot4$	……④
②－④	$-4a+9b=\underline{5}$	……⑤
⑤×3	$-12a+27b=5\cdot3$	……⑥
③－⑥	$13a-29b=\underline{1}$	……⑦

$a=154$，$b=69$ なので⑦から，$154x+69y=1$ を満たす整数 x，y の組の1つは $x=13$，$y=-29$ である。(終)

このように，2数と，互除法に出てくる余りの数

154，69，16，5，1

を，a と b の1次式で表していこうという発想である。例えば，互除法の

$69-16\cdot4=5$

から，②－③×4を計算し，④の左辺を5に変形している。同様に，①～⑦までの左辺の数を，互除法の結果を用いて1まで変形し，その過程で，a，b の係数を計算すると，その係数が x，y の値になるというわけである。

§2. アイデアのきっかけ

もともとは表計算ソフトを利用して，次のような表を作って，再帰的に求める方法を考案した。

表1は，例の①，②，③，⑤，⑦から数字だけ書き入れたものである。

(余り)	商	a の係数	b の係数
154		1	0
69	2	0	1
16	4	1	−2
5	3	−4	9
1		13	−29

表1

左の2列は，互除法の商と余りを書き入れる。

表2では

$a=bp+r$

の4つの数字の位置関係を示している。

(余り)	商	a の係数	b の係数
a		1	0
b	p	0	1
r			
		A	C
	P	B	D
		A－PB	C－PD

表2

また，a の係数の列は，例の③⑤⑦の計算と同じように考えれば最下行の値が，商の列のＰと上の２つのＡ，Ｂを用いて，

Ａ－PB

のように再帰的に求めることができる。これは，b の係数の列も同様である。(表２)

この計算法を用いれば，例の解答も表３のように数字を書き込み，３行目以降の a，b の係数の値を再帰的に計算し，(余り)の値が１となる最下行の a，b の係数の値の

$x=13$，$y=-29$ が整数解の１つとなる。

(余り)	商	a の係数	b の係数
154		1	0
69	2	0	1
16	4	$1-2\cdot0=1$	$0-2\cdot1$ $=-2$
5	3	$0-4\cdot1$ $=-4$	$1-4\cdot(-2)$ $=9$
1		$1-3\cdot(-4)$ $=13$	$-2-3\cdot9$ $=-29$

表３

§3. 表の特徴について

改めて，表１を示す

(余り)	商	a の係数	b の係数
154		1	0
69	2	0	1
16	4	1	-2
5	3	-4	9
1		13	-29

表１(2)

a の係数と b の係数は交互に符号が変わっている。また，符号を無視すると，a と b の係数は２段目からだんだん大きくなり，下から見ると各列と商の列は互除法の商と余りの関係になっている。具体的には a の係数については最下行から

$13=3\cdot4+1$

$4=4\cdot1+0$

b の係数についても最下行から

$29=3\cdot9+2$

$9=4\cdot2+1$

$2=2\cdot1+0$

また，a の係数と b の係数を２行２列の行列とみると，どの４つの数字も，行列式の値は１か -1 になっている。

表の計算方法から，商の列の数と，最初の２行の１，０，０，１だけで計算できるはずなので，a の係数を漸化式として計算してみたが，これといった法則は見つけることはできなかった。

§4. おわりに

数学Ａの１次不定方程式の整数解を，互除法を用いて求める問題を授業で解説するときに，毎回「説明の難しさ」を感じてきた。何とかわかりやすいやり方はないものかと試行錯誤した方法が今回紹介した方法である。

前述したとおり，先に表での方法を思いついたのだが，授業の中で説明するのは難しいと感じていた。その後，何度か表を眺めているうちに最初の例の方法に気が付いた次第である。計算自体は連立１次方程式の考え方と同じなので，高校１年生でも抵抗感はないと考える。

最後に，お気づきの方もいると思うが，この計算方法は表計算ソフトで表３を作成し，セルに式を入力，コピーし，左の２列のみを代入することで簡単に計算できる。さらには，表３に QUOTIENT 関数を用いれば商も自動的に計算できるので，a，b を代入するだけで整数解を求めることも可能となるので，教科情報の授業での表計算ソフトの実習において，使える教材になるかもしれない。

(山梨県立富士河口湖高等学校)