放物線の長さを計算する

～$\displaystyle\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ や $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ の積分と大学入試問題～

ふじ い　さとし
藤井　敏

§1. はじめに

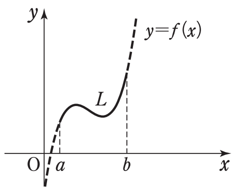
数学Ⅲの積分法の応用で「曲線の長さ」の求め方を学ぶ。しかし，そこに登場する例題は，サイクロイド，カテナリーといった複雑な式で表される曲線の長さである。もっと身近な放物線の長さを求める例題はどうして登場しないのだろうか。この素朴な疑問の答えは，推して知るべしで積分計算がかなり複雑だからである。この紙面ではこの複雑な定積分の計算方法と大学入試問題との関連を紹介する。

§2. 曲線の長さ

曲線 $y=f(x)$ の $a\leqq x\leqq b$ の部分の長さ L は

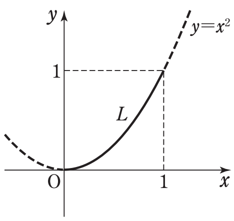
$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

という定積分で与えられる。



§3. 放物線 $y=x^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の長さ L を求めよう

【解法１】 置換積分法



$y=x^2$ から $y'=2x$,

$$L=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

ここで，$2x=\tan\theta$ とおくと $2dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \alpha$

ただし，$\tan\alpha=2$

$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$$L=\int_0^\alpha\sqrt{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{2\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\alpha\frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^\alpha\frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}\,d\theta$$

さらに，$\sin\theta=t$ とおくと $\cos\theta\,d\theta=dt$ から

θ	$0\ \to\ \alpha$
t	$0\ \to\ \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$L=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\frac{1}{(1-t^2)^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\left\{\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}+\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}\right\}dt$$

$$=\frac{1}{8}\left[-\log(1-t)+\log(1+t)+\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}\right]_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$$=\frac{1}{8}\left\{-\log\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}+\log\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\left(\log\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}+4\sqrt{5}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\log(2+\sqrt{5})}{4}\quad\boxed{答}$$

【解法２】 置換積分法

$2x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$ とおくと $2dx=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}dt$

x	$0\ \to\ 1$
t	$0\ \to\ \alpha$

$\alpha=\log(2+\sqrt{5})$

$$\sqrt{1+4x^2}=\sqrt{1+\left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=\int_0^\alpha\frac{e^t+e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{4}\,dt$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^\alpha(e^{2t}+2+e^{-2t})\,dt=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}e^{2t}+2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^\alpha$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}e^{2\alpha}+2\alpha-\frac{1}{2}e^{-2\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2}(2+\sqrt{5})^2+2\log(2+\sqrt{5})-\frac{1}{2}(2-\sqrt{5})^2\right\}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\log(2+\sqrt{5})}{4}\quad\boxed{答}$$

$\boxed{別解}$ $t=2x+\sqrt{1+4x^2}$ とおく解法もある。

【解法 3】 部分積分法

$$L=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx$$
$$=\Big[x\sqrt{1+4x^2}\Big]_0^1-\int_0^1\frac{4x^2}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$$
$$=\sqrt{5}-\int_0^1\frac{1+4x^2-1}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$$
$$=\sqrt{5}-L+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$$

よって $2L=\sqrt{5}+\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$

∴ $L=\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$ ……①

次に $I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$ を求める。

$2x=\tan\theta$ とおくと $2dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$

x	$0\ \to\ 1$
θ	$0\ \to\ \alpha$

ただし，$\tan\alpha=2$

$$I=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$$
$$=\int_0^\alpha\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}\cdot\frac{1}{2\cos^2\theta}\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^\alpha\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta$$

$\sin\theta=t$ とおくと $\cos\theta\,d\theta=dt$

θ	$0\ \to\ \alpha$
t	$0\ \to\ \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\frac{dt}{1-t^2}$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt$$
$$=\frac{1}{4}\Big[\log(1+t)-\log(1-t)\Big]_0^{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$
$$=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{5})$$

ゆえに①より $L=\dfrac{\sqrt{5}}{2}+\dfrac{\log(2+\sqrt{5})}{4}$ 答

参考

$I=\displaystyle\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}\,dx$ の置換方法は

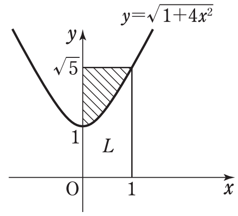
① $2x=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})$

② $t=2x+\sqrt{1+4x^2}$

③ $t=\log(2x+\sqrt{1+4x^2})$ などもある。

【解法 4】 定積分を面積ととらえる方法

$L=\displaystyle\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx$ は $y=\sqrt{1+4x^2}$ のグラフと x 軸，y 軸，直線 $x=1$ とで囲まれる図形の面積を表す。長方形の面積から斜線部分の面積を引けばよい。



$y=\sqrt{1+4x^2}$ $(x\geqq0)$ から

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{y^2-1}$$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx$$
$$=\sqrt{5}\times1$$
$$-\int_1^{\sqrt{5}}\frac{1}{2}\sqrt{y^2-1}\,dy$$

$y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$ とおくと

$$dy=\frac{e^t-e^{-t}}{2}\,dt$$

$$\sqrt{y^2-1}=\sqrt{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2-1}=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$$

$y=\sqrt{5}$ のとき $e^t=2+\sqrt{5}$ ∴ $t=\log(2+\sqrt{5})$

$$L=\sqrt{5}-\frac{1}{2}\int_0^\alpha\frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}\,dt$$

y	$1\ \to\ \sqrt{5}$
t	$0\ \to\ \alpha$

$\alpha=\log(2+\sqrt{5})$

$$=\sqrt{5}-\frac{1}{8}\int_0^\alpha(e^{2t}-2+e^{-2t})\,dt$$
$$=\sqrt{5}-\frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}e^{2t}-2t-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^\alpha$$
$$=\sqrt{5}-\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2}(2+\sqrt{5})^2-2\log(2+\sqrt{5})-\frac{1}{2}(2-\sqrt{5})^2\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\log(2+\sqrt{5})}{4}$$ 答

§4. 大学入試問題から

【問題 1】（2002　関西大　一部抜粋）

(1)　$y=x\sqrt{x^2+1}+\log(x+\sqrt{x^2+1})$ の導関数を求めよ。

(2)　曲線 $y=x^2$ $(0\leqq x\leqq1)$ の長さを求めよ。

解答 (1) $y'=\sqrt{x^2+1}+x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$

$$=\sqrt{x^2+1}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$=2\sqrt{x^2+1}$$ 答

(2)　$y=x^2$ から $y'=2x$，求める長さを L とすると

$$L=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+(2x)^2}\,dx$$

$$=\int_0^2\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{2}\,dt$$

$2x=t$ とおく

x	$0\ \to\ 1$
t	$0\ \to\ 2$

$$=\frac{1}{4}\int_0^2 2\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$$=\frac{1}{4}\Big[t\sqrt{t^2+1}+\log(t+\sqrt{t^2+1})\Big]_0^2$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{\log(2+\sqrt{5})}{4}$$ 答

●このようなていねいな誘導があれば，受験生は安心して解ける。

【問題 2】（2014　横浜市大）

a を正の実数とする。放物線 $y^2=4ax$ 上に 2 点 O(0, 0) と A$(x_1,\ y_1)$ をとる。$y_1>0$ として，次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha>0$ として，関数 $F(t)$ を

$$F(t)=\frac{1}{2}\{t\sqrt{t^2+\alpha}+\alpha\log(t+\sqrt{t^2+\alpha})\}$$

とおく。導関数 $F'(t)$ を求めよ。

(2)　点Oから点Aまでの曲線の長さ L を x_1 の関数として表せ。

●放物線を横に倒したもので【問題 1】と同じ問題。

【問題 3】（2019　同志社大）

座標平面上の曲線 $(x-y)^2-2(x+y)=0$ を C とする。

(1)　関数 $f(t)=\log(t+\sqrt{t^2+1})$ に対して，導関数 $\dfrac{d}{dt}f(t)$ を求めよ。

(2)　等式 $\dfrac{d}{dt}(t\sqrt{t^2+1})=a\sqrt{t^2+1}-\dfrac{b}{\sqrt{t^2+1}}$ が成り立つように，定数 a，b の値を定めよ。
また，不定積分 $\displaystyle\int\sqrt{t^2+1}\,dt$ を求めよ。

(3)　曲線 C 上の点 $(x,\ y)$ に対して，$x-y=t$ とおいて，x と y をそれぞれ t で表せ。

(4)　曲線 C 上の点のうち，x 座標の値が最小である点をP，y 座標の値が最小である点をQとする。2 点 P，Q の座標をそれぞれ求めよ。

(5)　曲線 C のうち，(4)の 2 点PとQの間の部分を D とする。曲線 D の長さを求めよ。

解答

(1)　$\dfrac{d}{dt}f(t)=\dfrac{1}{t+\sqrt{t^2+1}}\left(1+\dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ 答

(2)　$\dfrac{d}{dt}(t\sqrt{t^2+1})=\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}$

$$=\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2+1-1}{\sqrt{t^2+1}}=2\sqrt{t^2+1}-\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

よって $a=2$，$b=1$ 答

また $\sqrt{t^2+1}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{d}{dt}(t\sqrt{t^2+1})+\dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right\}$

したがって，(1)の結果から C を積分定数として

$$\int\sqrt{t^2+1}\,dt=\frac{1}{2}\{t\sqrt{t^2+1}+\log(t+\sqrt{t^2+1})\}+C$$ 答

(3)　$x-y=t$ を曲線の式に代入すると $x+y=\dfrac{t^2}{2}$

$x-y=t$ と連立して $x=\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{t}{2}$，$y=\dfrac{t^2}{4}-\dfrac{t}{2}$ 答

(4)　(3)から $x=\dfrac{1}{4}(t+1)^2-\dfrac{1}{4}$，$y=\dfrac{1}{4}(t-1)^2-\dfrac{1}{4}$

ゆえに，$t=-1$ で x は最小値 $-\dfrac{1}{4}$ をとるからPの座標は $\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4}\right)$，また，$t=1$ で y は最小値 $-\dfrac{1}{4}$ をとるからQの座標は $\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{1}{4}\right)$ 答

(5)　(3)の結果から $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2}(t+1)$，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{2}(t-1)$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}(t^2+1)$$

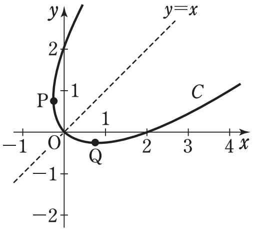
よって，求める長さを L とすると，(2)の結果から

$$L=\int_{-1}^1\sqrt{\frac{1}{2}(t^2+1)}\,dt=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1\sqrt{t^2+1}\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big[t\sqrt{t^2+1}+\log(t+\sqrt{t^2+1})\Big]_0^1$$

$$=1+\frac{\sqrt{2}}{2}\log(1+\sqrt{2})$$ 答

●曲線 C：$(x-y)^2-2(x+y)=0$ の方程式は x と y を入れ替えても同じだから，直線 $y=x$ について対称である。したがって，曲線 C を原点の周りに 45° 回転させると，放物線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x^2$ が得られる。回転行列や複素数の利用で容易に確認できる。これより曲線 C の概形は右図。



また，この回転でP，Qは各々

$P'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$，$Q'\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$に移る。よって本問は，放物線 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x^2\ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ の長さを求めることに他ならない。

> **【問題 4】**（2010　同志社大）
>
> 次の$\boxed{}$に適する数を記入せよ。
>
> $$\frac{d}{dx}\log(2x+\sqrt{4x^2+1})=\frac{\boxed{}}{\sqrt{4x^2+1}}$$
>
> $$\frac{d}{dx}\log(x\sqrt{4x^2+1})=2\sqrt{4x^2+1}-\frac{\boxed{}}{\sqrt{4x^2+1}}$$
>
> となる。これを利用すれば，
>
> $\int_0^1\sqrt{4x^2+1}\,dx=\boxed{}$ である。

●【問題 3】の類題。本問は放物線 $y=x^2$ $(0\leqq x\leqq 1)$ の長さを求める問題に他ならない。同志社大学では 2009 年にも定積分の漸化式を用いて $\int_0^1\sqrt{x^2+1}\,dx$ の値を求める出題がある。同じ入試問題は形を変えて繰り返し出題される。

> **【問題 5】**（2002　京都大）
>
> (1)　$x\geqq 0$ で定義された関数 $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ について，導関数 $f'(x)$ を求めよ。
>
> (2)　極方程式 $r=\theta$ $(\theta\geqq 0)$ で定義される曲線の，$0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分の長さを求めよ。

解答　(1)　$f'(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$　**答**

(2)　極方程式 $r=\theta$ $(\theta\geqq 0)$ から

$x=r\cos\theta=\theta\cos\theta$，$y=r\sin\theta=\theta\sin\theta$

$\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta-\theta\sin\theta$，$\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta+\theta\cos\theta$

よって $\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$

$=(\cos\theta-\theta\sin\theta)^2+(\sin\theta+\theta\cos\theta)^2$

$=1+\theta^2$

曲線 $r=\theta$ の $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分の長さを L とすると

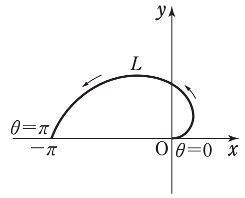
$$L=\int_0^\pi\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$

$$=\int_0^\pi\sqrt{1+\theta^2}\,d\theta\quad\cdots(*)$$

$$=\left[\theta\sqrt{1+\theta^2}\right]_0^\pi-\int_0^\pi\frac{\theta^2}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$$

$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-\int_0^\pi\frac{1+\theta^2-1}{\sqrt{1+\theta^2}}\,d\theta$$

$$=\pi\sqrt{1+\pi^2}-L+\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$$



よって $2L=\pi\sqrt{1+\pi^2}+\int_0^\pi\frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$

(1)より $2L=\pi\sqrt{1+\pi^2}+\left[\log(\theta+\sqrt{1+\theta^2})\right]_0^\pi$

$=\pi\sqrt{1+\pi^2}+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})$

ゆえに $L=\dfrac{\pi\sqrt{1+\pi^2}+\log(\pi+\sqrt{1+\pi^2})}{2}$　**答**

●曲線 $r=\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ の概形は上図のアルキメデスの渦巻線といわれるものである。L は(＊)の形から放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ $(0\leqq x\leqq\pi)$ の長さである。

> **【問題 6】**（2010　早稲田大　一部抜粋）
>
> 定積分 $\int_0^1\sqrt{t^2+1}\,dt$ の値を $t=\frac{e^s-e^{-s}}{2}$ と置換することによって求めよ。

●空間図形の求積問題で $\int_0^1\sqrt{t^2+1}\,dt$ が必要となるための誘導である。

> **【問題 7】**（2014　静岡大）
>
> (1)　関数 $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+1})$ を微分せよ。
>
> (2)　(略)
>
> (3)　極限値 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$ を求めよ。

●定積分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ と区分求積法の融合問題。

【まとめ】

放物線の長さを誘導なしで求めることは大変なため，実際の入試問題ではいろいろな誘導で求めさせている。また，定積分の計算問題の中には放物線の長さが見え隠れしているものがある。さらに入試問題では $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$，$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ のタイプの積分も多く出題されている。授業で積極的に扱いたい。

§5. 定積分雑感

最近は計算力のない受験生が増えたためだろうか，奇しくも 2019 年度入試では以下のように定積分単独の問題が京都大や東京大で出題され大きな話題となった。京都大では過去にも同様の出題がある。

(2019　京都大)　次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_1^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx$　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos x}$

(2019　東京大)　次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

(2012　京都大)

定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ。

(2011　京都大)

定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx$ を求めよ。

(2007　京都大)

定積分 $\displaystyle\int_0^2\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}dx$ を求めよ。

《参考文献》

〔1〕 年度別「数学Ⅲ(C)入試問題集」(数研出版)

〔2〕 年度別「全国大学入試問題正解」(旺文社)

〔3〕「チャート式数学Ⅲ青チャート」(数研出版)

〔4〕「フォーカスゴールド数学Ⅲ」(啓林館)

〔5〕 研究誌　拙著「数学・峠の茶屋/数学読本 100 話」

(滋賀県立守山高等学校)