誰でも分かる速さの感覚から入る微分

臼井（うすい）　達哉（たつや）

§1. 瞬間の速さは誰でも分かっている

数学・物理では，瞬間の速さは平均の速さの極限値として定義される。また中学校では瞬間の速さを非常に短い時間の平均の速さと説明している。しかしそれらとは無関係に「瞬間の速さ」は感覚的には誰でもよく分かっているのである。まずそれを確認しよう。

「ものを落とすと落ちる速さは段々速くなる」…(1)

この文章の意味は高校生なら誰でも分かるだろう。かなり小さい子供でも分かると思う。これが分かるということはどういうことか考えてみよう。

(1)が分かれば「1秒後よりも2秒後の方が落ちる速さはより速い」ことが分かる。ところがこう言えるためには「1秒後の速さ」と「2秒後の速さ」を比較しなければならない。「1秒後の速さ」「2秒後の速さ」はある時刻における瞬間の速さのことである。「1秒後の速さ」という言葉から「1秒後辺りの極短い時間例えば1億分の1秒間の平均の速さ」等という面倒なことは誰も考えないであろう。単純に文字通り「1秒後の速さ」で分かる。2つの時刻における瞬間の速さが理解できるから，両者を比較して「1秒後よりも2秒後の方が速い」という結論が出てくる。これと同じ考察が任意の2つの時刻に対して可能であるから，時間の経過とともにより速くなるということが分かるのである。これが(1)が分かるということの中身である。(1)が分かるならば誰でも瞬間の速さは感覚的には分かっているのである。そうでなければ「段々速くなる」という言葉はありえない。

§2. 平均の速さと瞬間の速さ

「平均」という言葉を用いていることから，平均の速さは文字通り何かの平均である。何もないところにいきなり平均はありえない。先にいくつかの数値があってそれらの平均である。速さの場合は各時刻に瞬間の速さがあり，平均の速さは無数の時刻の瞬間の速さの平均である。

数直線上の運動を $x=f(t)$ とすると $t=a$ から $t=b$ までの平均の速さは，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)\,dt=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

で表される。平均の速さは普通は右辺で表されるが，平均という言葉の意味から考えれば左辺の方が適している。

平均の速さは計算はできるが，最初と最後の位置と時刻を用いて定義されており，途中経過はすべて無視している。そのため見かけ上全く異なった運動であっても平均の速さは同じということが起こる。どれだけ短い間隔をとっても途中経過を無視しているという点で，平均の速さは運動の記述としては不完全である。

一方，瞬間の速さは誰でも感覚的には分かっているが，1つの時刻しかないため単純には計算ができない。これは不思議なことである。「連続関数」もこれと似ている。「グラフがつながっている」というイメージは誰でも分かるが，これの定式化は面倒である。

さて本稿では「誰もがもっている瞬間の速さについての感覚的理解」を最大限用いて思考実験を行い，瞬間の速さの数値化を試みる。感覚的に理解している瞬間の速さを求めるのであって，これを定義するのではない。感覚だけでは考えたり議論できなくなった段階で，初めて定義が必要になるのである。あまりに早い段階で定義を持ち出すことは学ぶ側から見ると不自然である。

筆者は実際に以下で述べる方法を授業で何度も用いている。そこに書かれている生徒の反応は実際の授業での平均的な反応であり，必ずしもこの通りになるとは限らない。生徒の反応に柔軟に対処する必要がある。

§3. 100 m 競争（瞬間の速さと平均の速さ）

授業は次の問題から始める。

> **問題 1．** A，B の 2 人が 100 m 競争をした。A は最初から最後までほとんど同じ速さで走った。B はスタートは遅れたが徐々に速くなり途中で A を抜いた。しかし最後は疲れて A に抜かれてしまった。A，B どちらが足が速いか。

授業では動きを伴った説明ができるため，この状況は容易に理解できる。生徒の考えは 2 つに分かれる。両者の意見を聞きながら授業を進める。A が速いと思った生徒は 100 m の平均の速さを考えているのであり，B が速いと思った生徒は B が A を抜いた瞬間の速さを考えている。

ここで速さには「平均の速さ」と「瞬間の速さ」があることを確認する。前者は既に学習しているから，その計算方法を生徒は知っている。後者については冒頭の(1)について説明し，深く考えなくても感覚的には誰でも分かっていることを確認する。しかし今のところ計算はできない。これからその瞬間の速さの求め方を考えていく。

§4. 落下運動 1（瞬間の速さと平均の速さの比較）

> **問題 2．** 十分に高い垂直な崖の上から小さい鉄球を落とす。落とした後の次の 5 つの速さを比較せよ。
>
> a ：1 秒後の速さ
> b ：1 秒後から 2 秒後までの平均の速さ
> c ：2 秒後の速さ
> d ：2 秒後から 3 秒後までの平均の速さ
> e ：3 秒後の速さ

b, d は平均の速さであるから計算することによって比較できる。一方 a, c, e は瞬間の速さであるから数値化できない。それにもかかわらず多くの生徒が $a<c<e$ であることを納得する。さらに平均の速さと瞬間の速さは別ものであるのに $a<b<c<d<e$ であることも納得する。これは不思議なことである。

§5. 等速直線運動（2 つの速さの一致）

> **問題 3．** 瞬間の速さと平均の速さが一致する運動はないか。

中学で既に学習済であるから，生徒から等速直線運動という解答が出てくる。ここでは平均の速さと瞬間の速さが等しいことを誰もが認める。これによってこの場合は瞬間の速さを求めることができる。

§6. ものを真上に投げる（瞬間の速さゼロ）

速さが変化する運動において瞬間の速さを求めることを考える。

> **問題 4．** ものを垂直に投げ上げる。最初上に上がっていき，やがて下に落ち始め床に落ちる。この運動で瞬間の速さが分かるところはないか。

ものが一番上に上がって止まった瞬間の速さは 0 であるという答えが返ってくる。これによって速さが変化する運動であっても止まった瞬間だけは瞬間の速さが数値として求められることが分かる。

§7. 2 つの列車（瞬間の速さを求める）

> **問題 5．** 速さが変化する運動で，動いているときの瞬間の速さを求める方法はないか。

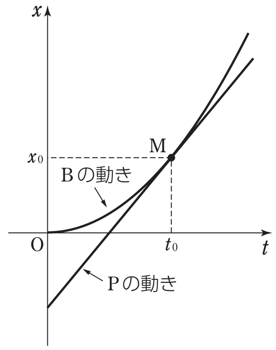
この問に対しては生徒からの適切な解答は期待できない。そこで次の例を示す。

> **例 1．** 2 つの鉄道線路が直線で平行に走っている。片方の線路には非常に長い列車 A が時速 100 km の等速度運動をしている。もう 1 つの線路には 1 両だけの列車 B が止まっている。B が発車した。B は徐々にスピードを上げていき最後には A より速くなった。その途中で B から見て A が止まって見える瞬間がある。その瞬間の B の速さは時速 100 km である。

この説明を多くの生徒が納得する。例 1 の文は長く分かりにくいが，授業では図を用いることができるから説明は容易である。この例によって速さが変化する運動においても瞬間の速さを求められることが分かる。極限の考えを用いていない点が重要である。ここまではほとんどの生徒が理解できることが実践で分かっている。

次にこれをグラフで表す。列車Ｂを点とみなす。Ｂから見て列車Ａが止まって見えた瞬間にＢと重なった列車Ａの場所をＰとする。横軸を時刻，縦軸を線路上の位置として，ＰとＢの動きを座標平面に表すと［図１］のようになる。

Ｐの動きは直線であり，Ｂの動きは曲線となる。列車Ｂが発車した瞬間を $t=0$，その時のＢの位置を $x=0$ とする。ＰとＢは一瞬重なるがＰはＢを追い抜くことはないから，ＰとＢが重なった瞬間に直線と曲線は点 $\mathrm{M}(t_0,\ x_0)$ で接することが分かる。Ｐの速さは直線の傾きであるから，時刻 $t=t_0$ におけるＢの瞬間の速さはＭにおける曲線の接線の傾きであることが図から分かる。ここでも極限の考えは用いていない。



［図１］

§8. 落下運動２(瞬間の速さの計算)

例１で列車Ａの速さを変更すれば，列車Ｂのいろいろな速さになった瞬間が求められる。しかし一々列車Ａを走らせるのは不便である。そこで余分なものの助けを借りずに，任意の時刻における瞬間の速さを求めることを考える。

問題２の考察から，1.9 秒後から２秒後までの平均の速さより，２秒後の方が速い。さらに 1.99 秒後から２秒後までの平均の速さより，２秒後の方が速い。どんどん時間を短くしていくと平均の速さは２秒後の速さに近づいていくのではないかと予想できる。しかし違うかもしれない。

極限抜きでこれ以上考察するのは難しい。そこで次の例を数式を用いて考える。

問題６． 地球より重力が小さいある星で，十分高い崖の上から鉄球を垂直に落とす。落としてから t 秒間で x m 落下したとき，$x=f(t)=t^2$ という関係が成り立つとする。落としてから a 秒後の鉄球の速さ $v(a)$ を求めよ。

$h>0$ とする。落としてから $a-h$ 秒後から a 秒後までの h 秒間の平均の速さは

$$\frac{f(a)-f(a-h)}{a-(a-h)}=\frac{a^2-(a-h)^2}{h}=2a-h \quad \cdots\cdots①$$

となる。次に a 秒後からそれより少し後の $a+h$ 秒後までの h 秒間の平均の速さを求めると，

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=2a+h \quad \cdots\cdots②$$

となる。問題２の考察，$b<c<d$ から

$$2a-h<v(a)<2a+h \quad \cdots\cdots③$$

が得られる。

③において h を０に近づけていくと，$2a-h$ と $2a+h$ はともに $2a$ に近づく。$v(a)$ はこの２つの値に挟まれているから，$v(a)=2a$ であることが分かる。あるいは，h がどれだけ０に近い値でも③は成り立つから $v(a)=2a$ しかあり得ない。

ここは h が負の場合も考えて②だけで考えることが多い。しかし生徒にとっては $h>0$ として，③のように $v(a)$ をはさみうちにした方が分かりやすいと思う。

①，②を２点を通る直線の傾きと考え，不等式③の意味をグラフを用いて考察すると，瞬間の速さと接線の傾きの関係が理解できるだろう。

§9. おわりに

瞬間の速さは，微分の応用として扱われる場合が多い。しかしニュートンに始まる瞬間の速さは微分の源流の１つである。導入でこれについて詳しく考察することが，抽象的で分かりにくい微分係数の理解に役立つと考える。

(岐阜県立長良高等学校)