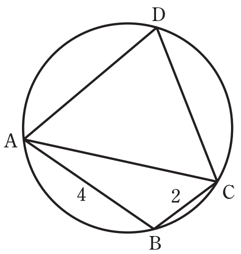
# 2辺の長さが一定の三角形の外接円に関する一考察

よこやま　まさみち
横山　政道

## §1. はじめに

**問題**　AB＝4，BC＝2 の四角形 ABCD の外接円の直径が最小になるときの直径を求めよ。

（2016年センター数学ⅠA問題より一部抜粋）

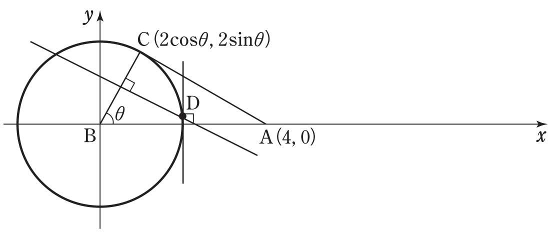



三角形 ABC の外接円の直径が最小になるときを考えればよく，辺 AB が直径となる円が答えなのだが，限られた時間内でそのことに気づいた生徒は少なかった。そこで，この『2辺が一定の長さの三角形の外接円最小問題』について証明を試みた。

（授業は2019年11月前任校の五ヶ瀬中等教育学校で実施）

## §2. 証明

**［証明Ⅰ］**　下図のように座標平面を設定する。




辺 BC の垂直二等分線と AB の垂直二等分線の交点は，$\mathrm{D}\left(2,\ \dfrac{1-2\cos\theta}{\sin\theta}\right)$ だから，外接円の半径 $R$ は，$R^2=4+\left(\dfrac{1-2\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

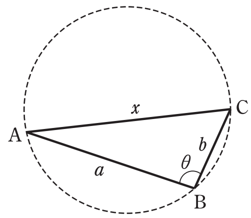
$$\frac{dR^2}{d\theta}=\frac{2(1-2\cos\theta)(2-\cos\theta)}{\sin^3\theta}$$

$0<\theta<\pi$ の範囲で $R^2$ の増減を調べると $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $R$ は最小になる。よって，△ABC は ∠C＝90° の直角三角形となる。つまり △ABC の外接円が最小になるのは辺 AB が直径となる円のときである。

**※一般化**

**［証明Ⅱ］**

AB＝$a$，BC＝$b$，AC＝$x$，∠ABC＝$\theta$ とおき，$a>b$ とする。このとき，△ABC の外接円の半径 $R$ が最小になる条件を求める。




余弦定理，正弦定理により

$$x^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

$x=2R\sin\theta$ を代入すると

$$4R^2(1-\cos^2\theta)=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

$\cos\theta=t$ とすると

$$4R^2t^2-2abt+a^2+b^2-4R^2=0$$

$t$ の2次方程式が $-1<t<1$ を満たす実数解をもつ条件を考える。左辺を $f(t)$ とすると

$f(-1)=(a+b)^2>0$　常に成り立つ

$f(1)=(a-b)^2>0$　常に成り立つ

$-1<$軸$<1$ より　$-1<\dfrac{ab}{4R^2}<1$　……①

$\dfrac{D}{4}\geqq 0$ より　$(4R^2-a^2)(4R^2-b^2)\geqq 0$　……②

①より　$R^2>\dfrac{ab}{4}$　……①′

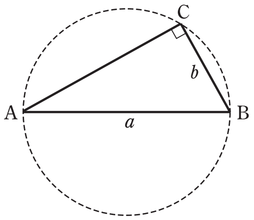
$a>b>0$ に注意して②を解くと

$R^2 \leqq \frac{b^2}{4}$，$\frac{a^2}{4} \leqq R^2$

これと①′から　$R^2 \geqq \frac{a^2}{4}$

よって，$R$ の最小値は $\frac{a}{2}$

したがって，辺 AB が直径となる円のときである。





**《参考文献》**

〔1〕 2016 年センター数学ⅠA


（宮崎県立宮崎大宮高等学校）