# 必要・十分条件と必要十分条件の指導

村上（むらかみ）　仙瑞（せんずい）

## §1. はじめに

必要条件，十分条件，必要十分条件は大学入試頻出分野で，問題の解き方のパターンがいろいろなところで解説されている。

出題形式といえば，たとえば次のように，『$n$が自然数のとき，$n$が6の倍数であることは$n$が3の倍数であるための$\boxed{\phantom{xx}}$条件である』というようなクイズ形式で，この解き方はパターン化していて，

$n$が6の倍数である $\Longrightarrow$ $n$が3の倍数である

と矢印をかき，この命題は真であり，また逆に

$n$が3の倍数である $\Longrightarrow$ $n$が6の倍数である

と矢印をかき，これは偽であるから，答えは十分条件である，となる。

生徒の方は，答えが出ればそれがよいわけで，この問題の意味について深くは考えようとしない。答えを埋めればそれでよいという状態になっている。単に答えを求めるだけで，この先どういう応用がまっているのかも述べられていないので，はっきりいってこの問題を解いたら終わりである。

しかし，必要，十分条件はその後数学を解く過程において目立たないが礎になっている。入試問題でも同値(必要十分条件)をきちんと示さないと，正解を与えないあえて同値性に気づくかを試している問題もたくさん出題されている。だからこそ，この分野については，きちんと理解をして論理力を鍛えないといけないということである。また数学Ⅰの最初の方にでてくるというのもその重要さ故だと考える。

また生徒もなぜ必要条件，十分条件という名前がついているのかもきちんと理解できていない生徒も多い。そこでこの必要条件，十分条件の授業準備研究をしていく中で，生徒がこの意味を理解して私自身が授業で手応えをつかんだ指導，授業研究について共有できたらと思い筆をとった。私自身の授業研究を紹介していきたい。

ここでは定義に従って，集合に着目して解説したこと，またパワーポイントのアニメーションを使うことによって理解度が上がったことを紹介したい。

## §2. なぜ必要条件，十分条件というのか

必要条件，十分条件の定義は，2つの条件 $p$，$q$ について，命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき，$p$ は，$q$ であるための**十分条件**である，$q$ は $p$ であるための**必要条件**であるという。

つまり，

$$p(\text{十分条件}) \Longrightarrow q(\text{必要条件})$$

である。この表現のうらに隠された本質的な意味について，なぜ必要条件，十分条件といわれるのか考えよう。

まず命題が真であるとは教科書に解説されているように，条件 $p$，$q$ を満たすものの集合 $P$，$Q$ について，命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき，

$$P \subset Q$$

が成り立っているということである。またこの部分集合 $P$，$Q$ を考える以上，もちろんこれらを包む全体集合があるわけで，生徒にまず意識させたのは，$P$，$Q$ を包む全体集合 $U$ を考えさせることである。つまりこれらの命題とそれぞれの条件の意味は次のようにまとめられる。

> この十分条件，必要条件の意味は，$P$，$Q$ を包む全体集合 $U$ を考え，全体集合 $U$ の要素 $x$ が集合 $P$ に属するには $Q$ に属することが(少なくとも)必要で，$Q$ に属するには集合 $P$ に属していれば十分。だから $p$ が十分条件で，$q$ が必要条件といわれる所以である。

ということである。この解説ではあまりに抽象的であるので，もっと身近な話題で解説した。たとえば次のようなものである。

神戸市民であることは，兵庫県民であるための$\boxed{\phantom{xx}}$条件である。ここでまずは神戸市民という集合$P$，兵庫県民という集合を$Q$，そして$P$と$Q$を含むような全体集合，たとえば日本人の集合$U$という集合を考える。そして日本人の集合$U$から１人の日本人を考え，この日本人が神戸市民といわれるには兵庫県民の集合に属することが少なくとも必要で，兵庫県民であるには神戸市民の集合に属していれば十分であるという意味である。また逆は，兵庫県民 $Q\not\subset$ 神戸市民$P$であるので，逆は成り立たない。よって答えは十分条件となる。

冒頭で述べた具体例に関しても，全体集合$U$を自然数の集合として（別に実数の集合や整数の集合でもかまわない），この$U$から１つの自然数$n$を選んで，この自然数$n$が６の倍数の集合に属するには３の倍数の集合に属することが少なくとも必要で，また自然数$n$が３の倍数の集合に属するには少なくとも６の倍数の集合に属していれば十分であるということである。

このように，

⑴ 全体集合を考える。
⑵ 全体集合の元（主語）は何であるかをはっきりさせる。
⑶ その元が与えられた条件の集合に属するには少なくとも何が必要で，どこに属していれば十分であるかを考える。

が十分条件，必要条件の本質である。以上の解説からわかるように，どちらかというと必要は緩い条件，十分条件は強い条件ということもいえる。これらを意識させて解説させ，生徒が問題演習するときも上記のやり方によって作文を作らせることによって，生徒の理解度が飛躍的に伸びた。

### ２．１　練習問題

$a=3$ は，$a^2=9$ であるための$\boxed{\phantom{xx}}$条件である。

まずは矢印を使った命題の形にかえる。つまり，

命題　$p：a=3 \Longrightarrow q：a^2=9$

を考える。条件$p$を満たす集合$P$は実数が３である集合，つまり，$P=\{3\}$，条件$q$を満たす集合$Q$は２乗したら９になる実数の集合，つまり $Q=\{3,\ -3\}$ である。明らかに，$P\subset Q$ であるので，この命題は真である。またこの命題の逆は，$Q\not\subset P$ なので偽である。よって答えは十分条件である。

この意味について，文章にして考えよう。全体集合$U$をたとえば，実数全体としよう。ある$U$の元，$x\in U$ をとり，$x$が$Q$に属するには，$P$に属せば十分で（$x$が３であれば十分で），$P$に属するには，$Q$に属することが少なくとも必要である（つまり，$x$が２乗して９になる実数の集合$Q$に属していることが少なくとも必要）という意味である。

## §3. 必要十分条件（同値）の本質的な意味

次に必要十分条件（同値）について，本質的な意味を解説する。定義は次の通りである。

２つの命題「$p \Longrightarrow q$」,「$q \Longrightarrow p$」がともに真であるとき，

$$p \Longleftrightarrow q$$

と表し，$p$は，$q$であるための**必要十分条件**という。また，$q$は，$p$であるための**必要十分条件**でもある。$p \Longleftrightarrow q$ であるとき，$p$と$q$は**同値**でもあるともいう。このとき，すなわち$P$のすべての元が$Q$に属し（$P\subset Q$），かつ$Q$のすべての元が$P$に属している（$Q\subset P$）であるので，条件$p$，$q$を満たすものの集合$P$，$Q$について，$P=Q$ が成り立つ。

授業で用いた具体例は次のようなものである。

８割以上が合格の資格試験があったとする。全体集合を受験した人全員とし，

命題　$p$：８割以上の点数をとる
　　$\Longrightarrow q$：資格試験に合格する

を考える。この命題の意味は，「８割以上の点数をとった人すべては，資格試験に合格する」という意味で，この場合，真であり，教科書の定義をそのまま適用すると，「資格試験に合格する」ことは，「８割以上の点数をとる」であるための必要条件になるという数学特有の表現で，理解することが難しい文章になってしまう。そこで集合の登場である。受験した人が，「８割以上の点数をとった人の集合$P$」に属するには，少なくとも「資格試験に合格した人の集合$Q$」に属することが必要であるということであり，また「資格試験に合格した人の集合$Q$」に属するには「８割以上の点数をとった人の集合$P$」に属すれば十分であるということである。

さて，今度は先ほどの命題の逆を考えよう。つまり，

命題　$q$：資格試験に合格する
　　$\Longrightarrow p$：８割以上の点数をとる

を考える。これもまた真である。よって，十分条件，必要条件を考えることができ，「8割以上の点数をとる」ことは，「資格試験に合格する」ための必要条件であり，「資格試験に合格する」ことは，「8割以上の点数をとる」ための十分条件となる。これは，受験した人が，「資格試験に合格した人の集合 $Q$」に属するには，「8割以上の点数をとる人の集合 $P$」に属することが少なくとも必要であるし，ある人が「8割以上の点数をとる人の集合 $P$」に属するには，「資格試験に合格した人の集合 $Q$」に属しておけば，十分であるということである。

よって，「$p$：8割以上の点数をとる $\Longrightarrow$ $q$：資格試験に合格する」は真で，しかもその逆「$q$：資格試験に合格する $\Longrightarrow$ $p$：8割以上の点数をとる」も真であるから，条件 $p$ と $q$ は，お互い必要十分条件で，同値である。つまり，

「8割以上の点数をとった人の集合 $P$」

‖

「資格試験に合格した人の集合 $Q$」

が成り立っているということで，集合 $P$ と $Q$ は，人数はもちろんのこと，中の人まで同じであるということである。

つまり，

> 条件 $p$ と $q$ が必要十分条件(同値)とは，条件 $p$ と条件 $q$ と見た目は違うけど(表現こそ違うが)，条件を満たす集合は同じ。

ということを生徒に理解させた。

ちなみに，世間一般でいう(日常会話でいう)「合格の必要条件は，8割以上の点数」といういい方には，合格するには8割以上の点数が必要であるし，8割以上の点数をとれば合格するという意味が含まれており，実は数学でいう必要十分条件の意味で使われていたということである。

### 3．1　必要十分条件の具体例（2次方程式）

『$x^2-3ax+a=0$ の2つの実数解が2つとも正となるような $a$ の値の範囲を求めよ。』という2次方程式の問題を考える。2次関数とみなして解くこともできるが，ここでは基本通り方程式で解くことにしよう。

この問題を解くときは，まず判別式 $D$ で実数をもつための条件を求める。つまり，$D=9a^2-4a>0$ と解いて，$a<0$，$a>\dfrac{9}{4}$ を出す。次に，2つの実数解がともに正である条件を，2つの解を $\alpha$，$\beta$ とおき，解と係数の関係を使って，

$$\alpha+\beta=3a>0 \text{ かつ } \alpha\beta=a>0$$

として，これらの共通部分の範囲が，2つとも正の解をもつ条件だったはずである。つまり，求める範囲は $a>\dfrac{9}{4}$ である。

ただどうして，2つの解が正のとき，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$ で置き換えて解いてよいのか。和が正という条件であると，2つのうち1つが負であっても成り立つので，もう1つ条件を加えたというように理解をしている人も多いのではないだろうか。これらの2つの式をみただけで，なんとなく解がともに正ということがいえているような気がする。これを理解することこそが，同値(必要十分条件)を考えることなのである。

つまり，2つの解 $\alpha$，$\beta$ がともに正

$$\Longleftrightarrow \alpha+\beta>0 \text{ かつ } \alpha\beta>0$$

がいえるということで，表現こそ違うが，『2つの解 $\alpha$，$\beta$ がともに正である集合』と『$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$ を満たす集合』が同じであるということを示せばよい。これは図1をみれば一目瞭然で，集合が同じであるから同値で，2つの解が正のとき，$\alpha+\beta>0$，$\alpha\beta>0$ で置き換えて解いてよいということがいえたのである(ただし，境界線は含まない)。もちろん，$\alpha\beta$ 平面で考えること自体，両者が実数であるという前提があってこそである。この置き換えには，本来このような意味があったのである。

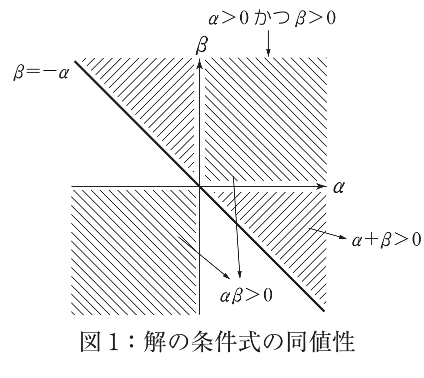


図1：解の条件式の同値性

## §4. 最後に

必要条件，十分条件を考えるとき，矢印を引いて，左から右が成り立つかのみを考え，穴埋め問題に正解するかどうかに終始した問題が多いが，しっかり定義の意味を考え，命題の意味することを考えていくことが大事である。問題を解くときに必要，十分条件を考えられるように習慣をつけることが大事である。受験のパターンに終始して，答えが出ればよいのではなく，きちんとこの必要条件，十分条件の独特な言い回しを平易な文に書き直して理解して，常に問題を解くときにイメージをもてるようにしておかないといけない。

最後であるが，私が授業で使ったパワーポイントのファイルを自身のサイト「高校動画参考書(http://essential-math.main.jp/visitors/hdougasankou/)」に掲載している。ご興味がある読者の方は一度アクセスしていただいたら幸いである。

図2：高校動画参考書

**《参考文献》**

〔1〕『数学Ⅰ』(数研出版)

(兵庫県　甲南高等学校・中学校)