たかが四角形，されど四角形

内藤　康正

§1. 四角形の分類問題

ある週刊誌(参考文献〔1〕)の「数学はこれからの必須教養」と題した記事に，三角形と四角形の定義と分類が載っていました。三角形は二等辺三角形・正三角形・直角三角形・直角二等辺三角形が，四角形は台形・平行四辺形・ひし形・長方形・正方形がそれぞれベン図で分類されていました。「議論を組み立てる上で大切なことは定義から出発すること」であり，「“正方形は台形だ” はイエスである」といった話で始まる記事でした。年度末の時間調整の授業時間を利用して，次のような問題形式にして生徒たちに挑戦してもらいました。

問題：次のベン図(図１)は，三角形の集合の包含関係を表しています。

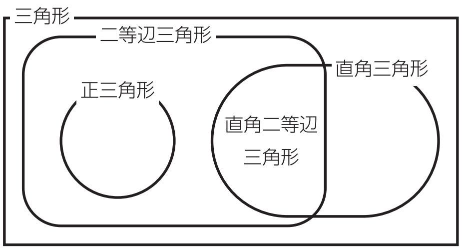

図１

これを参考にして，四角形の集合の包含関係を表すベン図を作ってください。ただし，四角形は

正方形・長方形・ひし形・平行四辺形・台形

の５種類とします。また，台形の定義をできるだけ正確に書いて下さい。

次の図２は正解の例です。

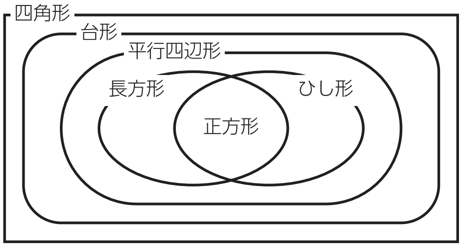

図２

２年生(３学期)の２クラス 72 名中，正しいベン図が描けた生徒はわずか 22 名。逆に 23 名もの生徒が，台形と平行四辺形に関して図３のようなベン図を描いていました。中には，台形が平行四辺形の補集合になっているものもありました。

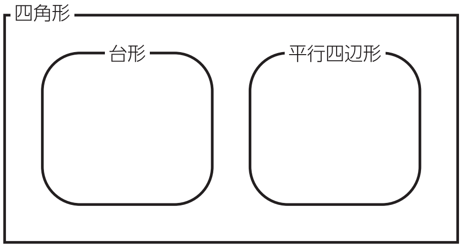

図３

また，正解した 22 名中台形を正しく定義できた生徒は７名でした。台形を「１組の向かい合う辺が平行で長さが異なる四角形」「向かい合う辺が１組だけ平行な四角形」と誤解している生徒が多く見られました。

もう少し良好な結果を期待していたので，「等脚台形」を加えたベン図はどうなるかという追加課題を用意していましたが，見送ることにしました。図２のままでは等脚台形がひとつながりの集合にならないので，ベン図を図４のように改良し，等脚台形を「円に内接する台形」とみることでうまくいく，という課題です。

さて，本稿をまとめるきっかけの一つは，「円に外接する四角形」で同様のベン図を考えてみたところ，図５の「？形」の箇所が台形以外の別の四角形でなくてはならないことに気づいたことでした。そしてこの「？形」の解明を通して，四角形の分類について一定の規準を得たと思われましたので，披露したいと考えました。

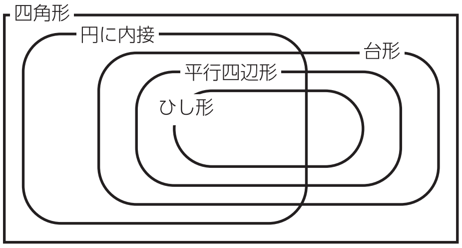

図４

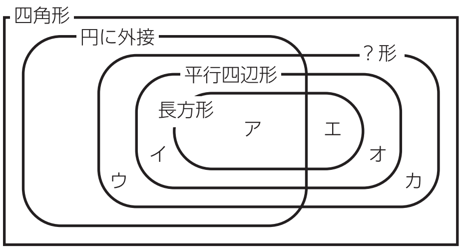

図５

§2. “左右和形”の存在

この節では，例えば図５の長方形(アとエの部分)について，長方形の要件だけを備えているエの部分を「純」を付けて純長方形のように呼ぶことにします。ア(正方形)，イ(純ひし形)に続く「ウ」は何か，から始まった考察ですが，こちらの方は「アイウ」でいわゆる凧型，「ウ」は純凧型であろうということが容易に予想できました。

そして「？型」解明のために試行錯誤を重ね，対角線に関しての対称性に注目することにしました。図５のア，イ，ウに関して

ア(正方形)：

どちらの対角線に関しても同じ対称

イ(純ひし形)：

各対角線に関して，それぞれ対称

ウ(純凧型)：

一方の対角線についてのみ対称

となっています(図６)。

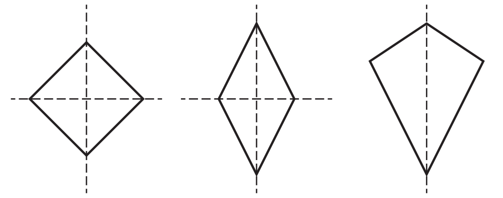

図６

これに対応するようにエ～カは，４辺の長さを隣り合う順に a，b，c，d として

エ(純長方形)：$a+b=b+c=c+d=d+a$

オ(純平行四辺形)：$\begin{cases} a+b=c+d \\ a+d=b+c \end{cases}$

※結果として $a+b=b+c=c+d=d+a$ となる。

カ(純？形)：$a+b=c+d$

とするのです。そこで「？型」(ア～カ)を「左右和形」と名付け，一方の対角線で四角形を左右に分けたときの隣り合う辺どうしの長さの和が等しい，つまり「$a+b=c+d$（または $a+d=b+c$）を満たす四角形」と定義することにしました。これで，図５のベン図が完成です。

蛇足になりますが，四角形の４辺を順に a，b，c，d としたとき，その四角形が円に外接するための必要十分な条件が

$a+c=b+d$（対辺の和が等しい）

であることは周知の事実です。ところが，今回設けた「左右和形」の条件

$a+b=c+d$（隣辺の和が等しい）

も，(向かい合う２組の辺がいずれも平行でない場合に)四角形が円に外接する条件になっています(参考文献〔２〕)。外接といっても，４辺の延長上で接しているのです(図７)。

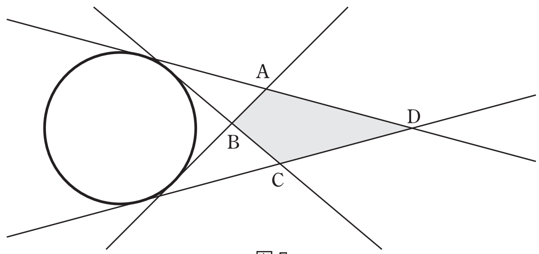

図７

§3. 四角形の第1世代～第4世代

冒頭の週刊誌の記事とは別に，四角形の分類には以前から興味があったのですが，図4と図5をどう合わせればよいのかという難題が長年にわたり未解決でした。

今回の週刊誌を機に，図4と図5を合わせるためには4種類の四角形を同格の生成元にして分類をスタートすればうまくいくことに気づきましたので以下に紹介します。その4種類を第1世代と呼ぶことにします。第1世代は次のA～Dの4通りです。また，説明のために最終的な分類結果を図8に示しておきます。全部で $2^4=16$ 種類の四角形に分類されていて，一部，その形が入っています。

◆第1世代(A～D)

A：円に内接する四角形

　$\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{C}=180°$

B：円に外接する四角形

　$a+c=b+d$

C：台形　$\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{B}=180°$

D：左右和形　$a+b=c+d$

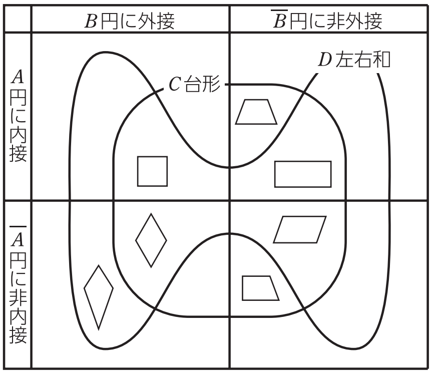

図8

第1世代A～Dからは，2つの共通部分として${}_4C_2$通り(E～J)の第2世代の四角形が生まれます。E，G，Hは適当に言葉をつなぎ足した名称としています(図9)。また網掛部分は，図8のどの部分に相当するかを示してあります。

◆第2世代(E～J)

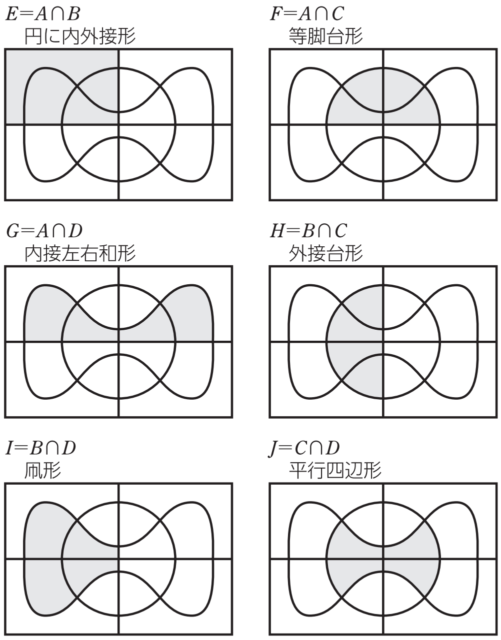

図9

続けて第3世代は ${}_4C_3$ 通りあります(図10)。

◆第3世代(K～N)

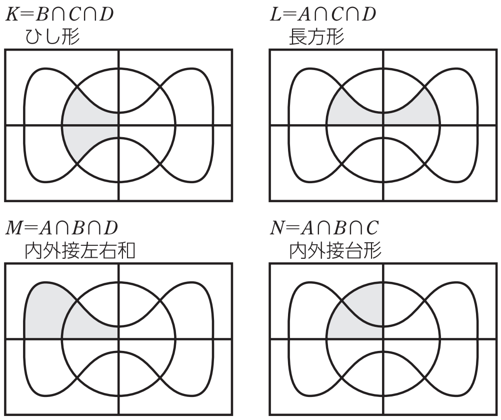

図10

この第3世代は，例えばひし形 $K=B\cap C\cap D$ であれば，B，C，Dのうち2つの共通部分からなる第2世代

$$J=C\cap D,\ I=B\cap D,\ H=B\cap C$$

を用いて

$$K=I\cap H,\ K=J\cap H,\ K=J\cap I \quad \cdots\cdots①$$

のように表すこともできます。

そしていよいよ第4世代が $A\cap B\cap C\cap D$ で正方形Oとなり，おしまいです。

§4. 立方８面体

第１世代 A〜D，第２世代 E〜J，第３世代 K〜N と第４世代の O を，系統的なグラフに表せないかを考えてみました。最初は平面のグラフを考えたのですが，線が入り組んでうまくいきません（図 11）。

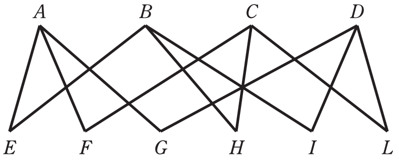

図 11

これを筒状にするなど試みましたがすっきりしません。ところが，偶然，立方８面体の図を眺めていたところ，ひらめきました。それが図 12 です。

まず，８面ある正三角形のうち，頂点どうしが接していない４面に第１世代の A〜D を割り振ります。次に $H=B\cap C$ は，面 B と面 C が接している正方形を割り当てます。以下，同様に第２世代６つを正方形の面に割り振ります。

そして $K=B\cap C\cap D$ は，面 B，C，D と頂点を共有する正三角形の面に割り振ります。①についても，うまく対応しています。

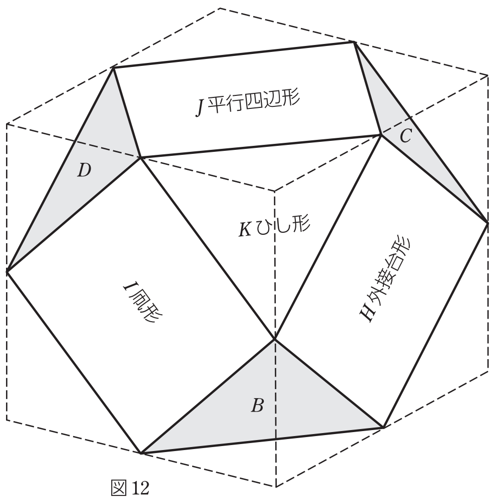

図 12

そして，最後に正方形を立体の内部に当てます。各面に割り当てていた四角形を，その面の重心に，正方形を立体の中心に割り当てることにすれば，すべての四角形を点で結んだグラフになります。正方形がいかに四角形のすべての要件を兼ね備えているかが実感できます。たかが四角形，されど四角形でした。

§5. 正方形と研修会の思い出

ところで，正方形といえば忘れられない研修会があります。東京都には東京教師道場という若手教員向けの研修会があり，発足当時の研修会に駆り出されたときのことです。

ある日，小中高が合同で小学校の図形の研究授業を見学する企画がありました。直角三角形４枚で正方形を作ろうというクライマックスで，事前に練習しておいたと思われる男女（仮に太郎君と花子さんとします）児童が黒板に出てきて，４枚の三角形①〜④を並べようとします（指導案によると図 13 のようになる予定）。

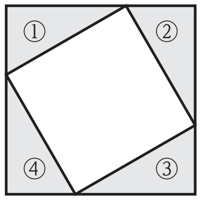

図 13

太郎君が①の三角形を黒板に貼ったあと，花子さんが㈿の位置（図 14）に三角形を置こうとしています。あわてた授業者は「ちがう！ちがう！」と目で合図をしています。

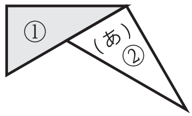

図 14

花子さんは，太郎君が②の三角形を正確に置けるように補助的に㈿の位置に置いたの（だと思います）ですが先生は気がつかず，やや不自然な形で予定通りの置き方を指示し，授業は終わりました。授業後の検討会では，花子さんの意図を汲んであげられなかったことが話題になると思っていたのですが，意外なことに「緊張して間違えそうになった花子さんを適切にサポートできた」と評価されたのです。花子さんの意図について発言しようとしたところ，時間切れとなってしまいました。

あくまでも想像ですが，本稿冒頭で生徒に答えてもらった四角形の分類も，いろいろな学習実態があったのだろうなと思います。念のため学習指導要領を確認してみたところ，次のような記述が見つかりました。

「平行が何組あるかに着目することで図形を分類することが可能になる。四角形を取り上げると，一組しかない四角形（台形）と二組ある四角形（平行四辺形）に分類することができる（学習指導要領・解説編『各学年の目標および内容』小学校４年生）」

たしかに，小学校で「正方形は長方形である」と言っても混乱のもとでしょう。しかし多くの高校生が「台形が平行四辺形になったとたん，台形ではなくなる」も問題ではないでしょうか。平行四辺形が台形の一種であるという認識は，いつ，どの学習段階で獲得するものなのでしょう。「自然数は分数でないから有理数でない」という勘違いも同じことで，根源的な部分で学習活動の妨げになっているのではと感じます。

§6. むすびに変えて

このたびは，数研通信100号おめでとうございます。手元にあるもっとも古い数研通信は第27号ですが，体裁が今とまったく変わっていないことに驚きます。

『数学発想物づくりコンテストの報告』(27号)

『2次曲線の虚空間曲線』(44号)

などを筆頭に，教員生活を通して数々の刺激を受けてきたこの通信ですが，近年私自身もいくつかの記事を掲載していただく機会に恵まれました。このご縁に感謝しつつ，本稿が第100号にふさわしいものになればという思いで書き上げました。

数研通信のますますのご発展をお祈りいたします。

《参考文献》

〔1〕 ダイヤモンド社
週刊ダイヤモンド 2019年2月9日号
〔2〕 サイエンス社
秋山武太郎著『幾何学つれづれ草』

（東京都立立川高等学校）