共通テスト 数学Ⅰ・A 第5問 について

藤岡（ふじおか）　優太（まさと）

§1. はじめに

2021年1月17日に実施された大学入学共通テスト数学Ⅰ・Aの第5問において次の内容が出題されました。(実際の問題とは記号設定が異なっています)

「直角三角形ABC (∠B＝90° とする) に対し，外接円をO，内接円をPとする (内心をIとする)。さらに，辺AB，ACに接する円をQ，Qと辺ABの接点をD，直線AIと辺BCの交点をEとするとき，4点B，D，E，Iが同一円周上にあることを示せ。」

登場するものが多いことからか，一読しただけでは全体像が把握できず，手書きで図を書くのが億劫になってしまい，作図ツール (GeoGebra) を使用することにしました。問題の状況を図示したものが下の **図1** です (以下で用いる図は作図ツールで描いたものではありません)。せっかくの作図ツール。図を動かしていろいろしているうちに，円Oと円Qの接点Fも同一円周上にありそうな気がしてきました。(**図2**)

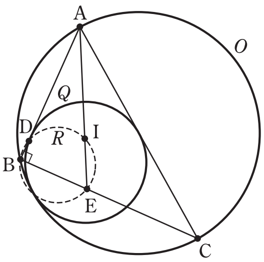


図1

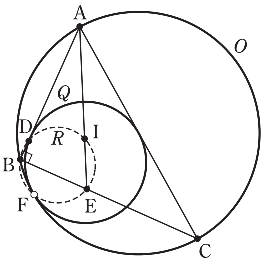


図2

さらにいろいろやっているうちに，点Eを除いた4点B，D，F，Iに関しては，△ABCが直角三角形でなくとも同一円周上にありそうな気もしてきました。(**図3**)

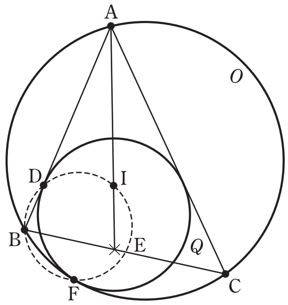


図3

以下の話は，これらの予想が正しいことを証明するものです。すなわち，ここでは次の2つの命題☆☆，★★が真であることを証明したいと思います。

☆直角三角形ABC (∠B＝90°) に対して，5点B，D，E，F，Iは同一円周上にある☆

★(一般の) △ABCに対して，4点B，D，F，Iは同一円周上にある★

§2. 証明の方針と設定・準備

証明の方針

証明には反転を用います。ここで用いる反転は，点Aを中心とし，半径ADの円に関する反転，すなわち，半直線AX上の点Xに対し，$AX\times AX'=AD^2$である半直線上の点X′を対応させる変換です。(ただし，点Aには (唯一の) 無限遠点を，(唯一の) 無限遠点には点Aを対応させます)

以下§1. での設定に加え，次の設定をします。(**図4**)

設定

(Ⅰ) 円Qの中心をJとする。

(Ⅱ) B，C，D，F，Jおよび円O，Qの上記反転での像をそれぞれB_1，C_1，D_1，F_1，J_1およびO_1，Q_1とする。

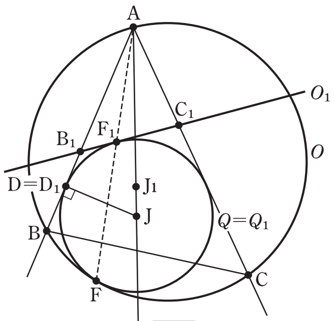


図4

準備

これらの点および図形に関し，次の(1)から(5)が成り立ちます。

(1)　$D_1=D$

(2)　J_1 は点Dから直線 AJ に下ろした垂線の足である。

(3)　$Q_1=Q$

(4)　O_1 は B_1，C_1 を通る直線である。

(5)　F_1 は，円 $Q\,(=Q_1)$ と直線 O_1 の接点である。

これらの事実を簡単に証明しておくと

(1)，(3)については，反転の定義および点Aと円 Q に関する方べきの定理からわかります。(3)よりこの反転は円 Q を不変にする反転です。

(2)については，J_1 について $AJ_1\times AJ=AD^2$ であること（反転の定義）と DJ を直径とする円に関する点Aの方べきを考えることで $\angle DJ_1J=90°$ がわかります。なお，この性質 $DJ_1\perp AJ$ を「J_1 の直交性」とよぶことにします（§5. で後述）。

(4)，(5)については，

〈反転の性質〉

「中心を通る円」と「中心を通らない直線」が互いにうつりあう。

ことから，点 A，B，C，F を通る外接円 O は，直線 $B_1F_1C_1$ にうつることがわかります(4)。また，円 O，Q の交点は唯一 F（≠A）のみであり，反転の単射性から，直線 O_1，円 Q_1 の交点も唯一 F_1 のみであることがわかり，(5)がわかります。

以上の準備のもと★★，すなわち，4点 B，D，F，I が同一円周上にあることを

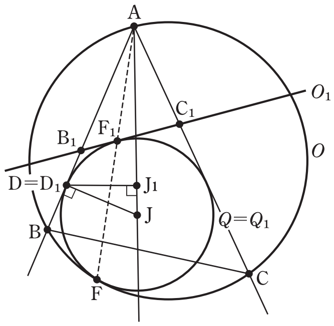
① 4点 B，D，F，J_1 が同一円周上にあること

② $J_1=I$ であること

の2段階に分けて示していくことにします。

§3. ① 4点 B，D，F，J_1 が同一円周上にあること

証明



点Dは，辺 AB 上の点であり，AB＞AD から $AB_1<AD$ です（円 Q と辺 AB との接点Dは，F とは異なり，A，B とも異なります）。点 C_1 についても同様であり，点Aと円 $Q\,(=Q_1)$ は直線 O_1 に関して反対側にあります。したがって，§2. で示したことから，円 $Q\,(=Q_1)$ は，$\triangle AB_1C_1$ の点Aに対する傍接円であり，$D_1\,(=D)$，F_1 はこの傍接円と辺 B_1A の延長，辺 B_1C_1 との接点です。したがって，$\angle JD_1B_1=90°$，$\angle JF_1B_1=90°$ から4点 B_1，D_1，J，F_1 は同一円周上にあります。（**図5**）

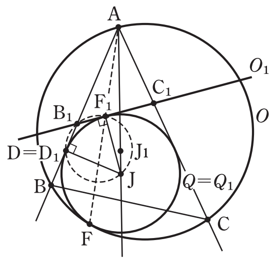


図5

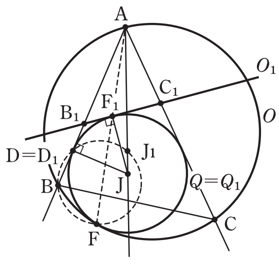


図6

反転による点の移動は

$B\to B_1\to B\to B_1$

$D\to D_1\,(=D)\to D\to D_1\,(=D)$

$F\to F_1\to F\to F_1$

$J_1\to J\to J_1\to J$

となります。反転により円は，円または直線にうつりますが，4点 B，D，F，J_1 は同一直線上にはないことから，同一円周上にある4点 B_1，D_1，F_1，J の像 B，D，F，J_1 が同一円周上にあることがわかります。（**図6**）

§4. ② $J_1=I$ であること

証明

　△ABC の内接円の半径を r,

　$\triangle AB_1C_1$ の内接円の半径を r_1,

　$\triangle AB_1C_1$ の点Aに対する傍接円の半径を s_1,

　点 J_1 と直線 AB の距離を t_1 とします。

$t_1=r$ が示されれば，$J_1=I$ が示されたことになります。そこで，

(ア) r と r_1 の関係

(イ) r_1 と s_1 の関係

(ウ) s_1 と t_1 の関係

を調べることで $t_1=r$ を導くことにします。

(ア) について：

　△ABC と $\triangle AB_1C_1$ は相似であり，相似比 k がわかれば $r=kr_1$ とかけることから k を求めることにします。簡便のため，$\alpha=B_1C_1$, $\beta=AC_1$, $\gamma=AB_1$ とすると，反転の定義から $\gamma\times b=AD^2$ であり，

$AD=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ であることから，

$b=\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{4\gamma}=\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{4\beta\gamma}\beta$ より，

$k=\dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{4\beta\gamma}$ であることがわかります。

(イ) について：

　$\triangle A_1B_1C_1$ の面積 S を用いると

$$r_1=\frac{2S}{\alpha+\beta+\gamma},\ s_1=\frac{2S}{-\alpha+\beta+\gamma}$$

とかけ，$s_1=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{-\alpha+\beta+\gamma}r_1$ ……③ がわかります。

(ウ) について：

　$\theta=\angle JAD$ とすると，$t_1=DJ\cos\theta=s_1\cos^2\theta$ です。ここで，$\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ であり，$\triangle AB_1C_1$ で余弦定理を用いると，$\cos 2\theta=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ となることから，

$$\cos^2\theta=\frac{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}{4\beta\gamma}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)}{4\beta\gamma}$$

となり，③と合わせて

$$t_1=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)^2}{4\beta\gamma}r_1$$
$$=kr_1=r$$

であることがわかります。

§5. 最後に…まとめと蛇足

　以上により★★が示されました。

　☆☆に関しては，∠ABC＝90° であれば，「§2. 準備 (2) J_1 の直交性」と「§4. ② $J_1=I$ であること」を用いることで，4 点 B，D，E，I が DE を直径とする同一円周上にあるとわかります。(図 7)

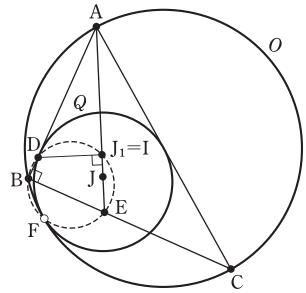


図7

　ところで，「J_1 の直交性」ですが「AJ を直径とする円の反転は AJ_1 に垂直な直線である」(この事実は，AJ が円上の 2 点の最大距離であることから AJ_1 がAと円の反転像の直線の距離となることが従う) ことを考えればイメージしやすいと思います。(図 8)

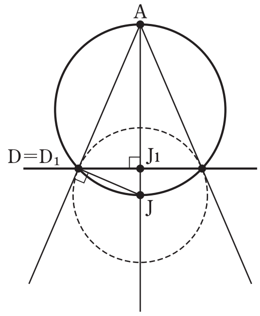


図8

　長々と話をしてきました。今回の問題では，△ABC と外接円 O に接する円 Q がスタートでしたが，このことが話を面倒にしている要因のように思われます。話を明快にするため，今回ポイントになった

　「§4. ② $J_1=I$ であること」

を三角形と傍接円の話として整理することで結びにしたいと思います。

　点Aに対する △AXY の傍接円を ${}_{A}C_{\triangle AXY}$ で表し，反転による点の像を ′ を用いて表すことにする。

　「点Aを中心とし，傍接円 ${}_{A}C_{\triangle AXY}$ を不変にする反転において，△AXY のAに対する傍心は，△AX′Y′ の内心にうつる。」

なお，蛇足になりますが

「点Aを中心とし，内接円 $C_{\triangle \mathrm{AXY}}$ を不変にする反転において，△AXY の内心は，△AX′Y′ のAに対する傍心にうつる。」

ことも同様にわかります。

初見では何ともはっきりしなかった「共通テスト数学Ⅰ・A 第5問」の姿ですが，ここにきてようやく美しい風景を垣間見ることができた気がします。

《参考文献》

〔1〕 2021.1.17 実施　大学入学共通テスト　数学Ⅰ・A　第5問

（高知県　土佐高等学校）