創刊号から100号までを振り返って

数研出版 編集部

「数研通信」は，その前身である「数研 教材研究」をリニューアルする形で，昭和 62 年 11 月に創刊されました。「数研 教材研究」の創刊は昭和 51 年 4 月のことですから，そこから数えますと，およそ半世紀近くが過ぎたことになります。

「数研通信」の創刊号には，行列と 1 次変換に関する指導が，特集記事として組まれています。昭和 62 年当時の科目構成は，数学Ⅰ，数学Ⅱ，基礎解析，代数・幾何，微分・積分，確率・統計であり，代数・幾何の中で，ベクトルや 2 次曲線とともに，行列，1 次変換が扱われていた時代です。ベクトルと行列は，その前の学習指導要領から高校学校に登場した比較的新しい内容で，当時，いろいろな実践報告があったことを記憶しています。また，創刊号には，ポケットコンピュータを活用した学習指導に関する記事もあり，今振り返ってみますと，時代の流れを感じさせるものとなっています。

「数研通信」創刊以降，学習指導要領は改訂を繰り返し，高等学校では，平成 6 年度，平成 15 年度，平成 24 年度より，新しい学習指導要領が学年進行で実施されました。そして，平成 30 年には，新たな高等学校の学習指導要領が告示され，令和 4 年 4 月より，新しい学習指導要領に沿った教科書，教材が使用されることになります。

この間，上に記した 1 次変換などが教科書から姿を消す一方，中学校数学に接続する形で平面幾何が扱われるようになるなど，学習内容も変化しました。また，1 色刷であった教科書は多色刷となって，見た目にもカラフルで取り組みやすいものに変わりました。私たちを取り巻く環境も変化し，教育の場面でもデジタル化が進んでいます。学習者用のデジタル教科書が 2019 年に法的に制度化されるなど，教科書・教材のあり方も大きく変化しようとしています。

このような様々な変化の中，「数研通信」は 100 号を迎えることができました。これは，先生方よりいただくご投稿の賜物であり，100 号の冒頭をお借りして，改めてお礼を申し上げたいと思います。本当にありがとうございます。

私どもが，新しい時代の教科書，教材に込めた思いには，様々な「つながり」があります。「数研通信」は先生方と私どもをつなぐ大切な冊子です。時代がどう変わろうとも，そのつながりが絶えることなく，「数研通信」がこの先 200 号，300 号，……と続くことを，願ってやみません。

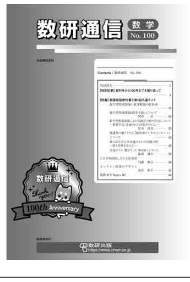
昭和 62 年　第 1 号発行

平成 4 年　特別号発行

学習指導要領の改訂に伴う特別号を発行。以後，平成 11 年，平成 23 年などにも特別号を発行

平成 16 年　第 50 号発行

令和 3 年　第 100 号発行



＜数研通信の特集記事と年表＞

※表中の年は全て発行・発売年度を表しています。

号（年度）	創刊号（1987）	10 号（1990）	20 号（1994）	30 号（1997）	33 号（1998）
学習指導要領		1990 共通一次試験廃止 センター試験開始へ	**1994　指導要領改訂　（Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，A，B，C）** 科目構成が再編され，A，B，C が新設。その全てにコンピュータの活用に関する単元が設けられた。		
教科書	(創刊号発行時) 「数学」，「新編」，「新」 の全 3 シリーズ		1993　高校教科書 「探究」シリーズが追加され 全 4 シリーズに！		
チャート式	(創刊号発行時) 「赤」，「青」，「黄」，「白」 の全 4 シリーズ				
周辺教材				1997 「クリエイティブ 高校数学講座」	
デジタル			1992 「知研の教材ソフト」 第 1 弾	1996 「Studyaid D.B.」 (数学入試 96)	
その他					

教科書の著者・編集委員執筆，編集部作成の記事①

・『高等学校数学科の学習指導要領（案）について』（ 5 号）
・『FERMAT の問題によせて』塩田徹治（ 5 号）
・『新高等学校学習指導要領（数学）について』（ 6 号）
・『新制度における教育課程案』（ 7 号）
・『 2 次方程式の解の公式について』（ 8 号）
・『「高等学校学習指導要領解説（数学編）」について』（ 9 号）
・『トピックス（森重文先生フィールズ賞受賞）』（10 号）
・『新制度における教育課程編成試案』（91 年度特別号）
・『平面幾何の扱いについて－高橋陸男先生のお話から－』（15 号）
・『新課程数学Ａ平面幾何』（93 年度特別号 2 ）
・『新課程数学Ｂ（数学Ｃ） 複素数平面と極座標』（94 年度特別号 3 ）
・『アンケート集計結果報告』（26 号）
・『数学発想物づくりコンテストの報告』秋山仁（27，28 号）
・『“クリエイティブ高校数学講座”の発刊に寄せて』秋山仁（29，30 号）
・『新しい学力観に沿った教育とは』秋山仁（32 号）

号 (年度)	34号 (1998)	40号 (2001)	50号 (2004)	60号 (2007)	66号 (2009)
学習指導要領			**2003　指導要領改訂（Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，A，B，C，数学基礎）** 「複素数平面」がなくなった。また，新設の数学基礎には数学を活用する単元が集まった。		
教科書			2002　高校教科書 「高校の数学」シリーズが追加！		
チャート式		2000 「黄チャートベスト」		2005　「これだけ 70」 「入試必携 168」 2006　「数学難問集 100」	2009 「青チャートワイド」
周辺教材		2000 4 STEP の精選版 「4 STEP セレクト」	2002 「体系数学」 	2005 「SetUp 数学演習」	2008 「オーダー問題集」
デジタル	1999　STDB「中学入試」 2000　STDB「問題集」 2002　STDB「参考書」			2007　STDB「受験編」 STDB「体系数学」	
その他				2007　第 1 回数研セミナー開催 テーマ：「Studyaid.D.B. の便利な検索方法」	

教科書の著者・編集委員執筆，編集部作成の記事②

- 『新高等学校学習指導要領(数学)について』(99 年度特別号)
- 『新課程高等学校数学概略』(01 年度特別号 2)
- 『新課程高等学校数学の内容』(01 年度特別号 2)
- 『高等学校学習指導要領「情報」(普通)の要点』(01 年度特別号 2)
- 『中学校学習指導要領 (数学) の要約』(01 年度特別号 2)
- 『中学校数学から削除・移行された内容』(01 年度特別号 2)
- 『新課程中学校における平面図形の扱い』(01 年度特別号 2)
- 『教科書の内容に関するQ&A』(51～57 号)
- 『新課程の受験編問題集に関する編集方針』(52 号)
- 『改訂版 数学Ⅰ，Aの教科書編集について』(55 号)
- 『新課程入試の分析と受験編問題集の対応』(56 号)
- 『Set Up 数学演習ⅠⅡAB(受験編)の編集方針について』(56 号)
- 『チャート式　数学参考書の改訂方針について』(57 号)
- 『教科書，問題集，参考書に関するQ&A』(58 号)
- 『2007 年大学入試問題に関するQ&A』(59 号)
- 『新高等学校数学学習指導要領について』黒木哲徳(65 号)

2009 年新聞 15 段新学期広告　(64 号掲載)

号（年度）	67号（2010）　70号（2011）　80号（2014）　90号（2017）　99号（2020）
学習指導要領	2011 学びのイノベーション事業スタート **2013　指導要領改訂**（Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，A，B，数学活用） 「行列」に代わり，「複素数平面」が復活。また，数学Ⅲの内容が増え，関数分野はⅠ，Ⅱ，Ⅲで扱われた。
教科書	2011　高校教科書 「高等学校」シリーズが追加され全5シリーズに！ 2011　中学教科書 基礎学力低下の懸念を解消すべく，中学教科書がデビュー！ 2019　大学数学テキスト 大学向け教材として，微分積分，線形代数を発行！
チャート式	2014「大学入試数学テーマ30」 2015「医学部入試数学」 2018「増補改訂版チャート」 2019「大学教養チャート」
周辺教材	2014「キートレーニング」 「ランダム演習」 「数学重要問題集」 2019 共通テスト対策受験編
デジタル	2012　STDB プレゼンテーション 機能搭載（Ver. 17） 2016「数研 Library」配信開始 2017「青チャート解説動画」配信開始 2016　STDB「数学入試20年」
その他	2014「数研オリジナルグッズ」 2015「LINEスタンプ」 2016「数研メルマガ」配信開始

教科書の著者・編集委員執筆，編集部作成の記事③

- 『新学習指導要領数学Ⅰ「データの分析」について』八木克巳（10年度特別号）
- 『新学習指導要領数学A「整数の性質」について』川中宣明（10年度特別号）
- 『教科書の内容に関するQ&A』（77～79号）
- 『新課程入試の分析と受験編問題集の対応』（82号）
- 『アクティブラーニングは怖くない』吉田信也（85号）
- 『アクティブラーニングの考え方と進め方へのヒント』阿原一志（85号）
- 『2016年大学入試の分析』（86号）
- 『「改訂版　チャート式　基礎からの数学Ⅰ＋A」（青チャート）解説動画のご案内』（90号）
- 『高等学校新学習指導要領「総則」の要点』（91号）
- 『高等学校新学習指導要領「数学」について』（91，92号）
- 『大学入学共通テスト試行調査について』（91，92号）
- 『高等学校新教育課程カリキュラム案』（94，95号）

2012年新聞15段元日広告　（73号掲載）

§1. 投稿原稿全体を振り返って

創刊号から100号に達するまでの34年間に，400名以上の先生から総数1500通を超える原稿をいただきました。最近10年間については，年間平均60通以上の投稿原稿をいただいております。

今回，100号発行を記念して，これまでに頂いた投稿原稿の内容を振り返ってみたいと存じます。

まず，本誌に掲載できなかった原稿も含め，投稿原稿全体の統計データを簡単にご紹介します。ただし2021年1月末時点で確認できたものに限ります。投稿数の多い順にランキング形式でご紹介します。

1．都道府県別

	都道府県
第1位	**東京都**　(13.7%)
第2位	**愛知県**　(9.4%)
第3位	**山口県**　(8.1%)

執筆者のご勤務先の学校等で都道府県別に集計した結果です。1位の東京都は，40名を超える先生からの投稿がありました。2位の愛知県と3位の山口県の先生からもたくさんのご投稿をいただきました。上の表には記載できませんでしたが，4位以降は，静岡県，栃木県，兵庫県，埼玉県，大阪府，広島県，神奈川県，…… と続きます。これらの府県の先生からも積極的にご投稿いただいております。

2．分野別

	分野
第1位	**数列**　(9.1%)
第2位	**整数**　(7.5%)
第3位	**三角関数**　(6.4%)

弊社が独自に集計した結果です。各投稿に1つの分野を対応させ，複数の分野にまたがる内容については，原則として，メインとなる分野に分類しました。上記の3分野には，フィボナッチ数列と黄金比，ピタゴラス数と不定方程式，チェビシェフ多項式など，数学的に興味深い題材があります。いずれも教科書等では扱いきれない内容になりますが，先生独自で多様に教材化を試みておられることと存じます。4位以降は，場合の数と確率，微分法，積分法，行列，複素数平面…… と続きます。詳しい内容は，§3. 以降でご紹介します。

§2. 掲載記事全体を振り返って

次に，本誌創刊号から99号までに掲載した記事について振り返ります。

弊社で趣旨別に掲載数を集計しましたところ，次のような結果になりました。

	趣旨
第1位	**教材研究の内容紹介**　(68.2%)
第2位	**掲載記事への補足**　(7.6%)
第3位	**授業実践例の報告**　(6.4%)

1位は，教材研究の内容紹介でした。執筆者による新しい発見や，あまり知られていない公式・定理の再発見など，先生ご自身が興味をもって考察された結果を紹介する記事が最も多く見られました。生徒が視覚的に理解できるような工夫，答えがきれいになるような作問方法など，さまざまな内容をご紹介いただきました。

2位は，本誌掲載記事の内容に対する補足でした。問題の別解や，定理・公式の別証明・別解釈といった，一歩深く踏み込んだ記事が多く見られました。詳しくは，§3. 以降でご紹介します。

3位は，授業実践例の報告でした。下にいくつかご紹介するように，コンピュータの活用，遊びの要素を取り入れた授業など，新しい試みの実践例をいろいろとご紹介いただきました。生徒がつまづきやすい点を示していただくこともあり，教材作りの観点からも大変参考になりました。

●コンピュータの活用

・『パソコンを利用した数学Aの平面図形の指導』(53号)
・『漸化式を目で見る』(65号)
・『数学Ⅲ「媒介変数表示と極座標」における，「コンピュータの利用」の指導案』(96号)　など

●遊びの要素を取り入れた授業

・『ビンゴゲームを数学の授業に』(23号)
・『思考力を養うために』(37号)
・『数学的帰納法の指導について－えんおう遊びを通して－』(46号)
・『工夫した授業展開』(60号)　など

§3. 掲載記事で紹介された内容①

ここからは掲載記事の内容を詳しくご紹介します。まず記事で紹介された数学の問題を 30 題だけ選んで再掲載します。(趣旨を変えない範囲で一部表現を変更したものもあります。) 解答・解説の掲載は控えます。詳細は〔　〕内の記事をご覧いただければと存じます。

問題 1． $\sqrt{4+\sqrt{13}}\sqrt{5+\sqrt{12}}-\sqrt{5+\sqrt{13}}\sqrt{4+\sqrt{3}}$ を計算せよ。〔『2 重根号の計算あれこれ』97 号〕

個々の 2 重根号ははずれないが，積や和を計算するとはずれてしまう計算問題の 1 つです。答はきれいな整数になります。

問題 2． 無理数の無理数乗は無理数か？
〔『無理数の無理数乗は無理数か？』21 号〕

反例が見つからないからといって，真とは限りません。直観に反する答が用意されています。一方，無理数であることを証明する記事はこちらです。

・『$\tan \pi x=2$ のとき x は無理数か』(80 号)

問題 3． $l^3+m^3+n^3=14$ を満たす整数 l，m，n はあるか？〔『ピタゴラス数と 5 の倍数』84 号〕

存在するかどうか判定する問題です。関連記事はこちらです。

・『2×2 行列に関する古市の問題について』(12 号)

問題 4． 2 次方程式 $z^2-2z-\sqrt{3}\,i=0$ を解け。
〔『複素数係数の 2 次方程式の「解の公式」とその活用』95 号〕

2 次方程式の解の公式は複素数係数でも適用できますが，根号内が虚数の場合は「複素数の平方根」を求める必要があります。関連記事はこちらです。

・『複素数係数の 2 次方程式の解の公式について』(84 号)

問題 5． 放物線 $y=x^2-2x$ と直線 $y=x+1$ の交点と，点 $(1,\ 1)$ を通る円の方程式を求めよ。〔『2 交点と他の 1 点を通る円・放物線』58 号〕

交点の座標を求めていては大変です。曲線束の考え方を利用して，方程式を直接求めます。関連記事はこちらです。

・『直線と円の交点を通る放物線』(58 号)

問題 6． $a+\dfrac{c}{b}$ と $\dfrac{c}{a+b}$ の大小を比べよ
〔『言葉で伝える難しさ』72 号〕

言葉で伝えにくい問題です。数学的にも面白い要素を含んでいます。

問題 7． 次の三角方程式を解け。

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1=0$$

〔『1 つの解がわかっている場合の方程式の新しい解き方について』63 号〕

文字をおき換えて解くタイプの三角方程式の問題です。H 30 年度センター試験でも出題されました。

$$2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{5}\right)-2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{30}\right)=1$$

おき換えに関する記事はこちらです。

・『置き換えは積極的に』(70 号)

問題 8． 不等式 $4^x-2\cdot3^x+2\leqq0$ を解け。
〔『生徒が興味・関心をもった不等式の問題』93 号〕

生徒から質問された面白い問題です。元は「不等式 $4^x-3\cdot2^x+2\leqq0$ を解け。」だったのでしょうか。生徒からの質問に答える記事は他にもあります。

・『生徒の質問から』(56 号)

問題 9． $\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}-7$ の正負を判定せよ。
〔『両不等式　2 数の大小に関する試み』29 号〕

記事で紹介されている「両不等式」は便利な記法です。累乗根の大小比較に関する記事もありました。

・『2 数 $\sqrt[m]{a}$ と $\sqrt[n]{b}$ の大小関係について』(42 号)

問題 10． $a>1$ のとき，曲線 $y=a^x$ と曲線 $y=\log_a x$ の共有点の個数を，a の値によって分類せよ。
〔『共通の底をもつ指数曲線と対数曲線の共有点について』78 号〕

2018 年名古屋大入試で同内容が出題されました。$a>1$ のとき，共有点があるとすれば常に直線 $y=x$ 上にありますが，$a<1$ のときはそうとは限りません。関連記事はこちらです。

・『方程式 $a^{a^{\cdot^{\cdot^{a^x}}}}=x$ の実数解の個数について』(27 号)
・『f と f^{-1} のグラフの共有点の個数について』(32 号)

問題 11. 次の放物線の頂点の座標を求めよ。

$$\begin{cases} x=t^2+4t \\ y=2t^2+3t \end{cases} \quad (t\text{ は媒介変数})$$

〔『曲率を使って放物線の頂点を求める』26 号〕

対称軸が斜めの放物線の頂点を求める問題です。曲率を利用すると，簡単に求めることができます。

問題 12. xy 平面を直線 $\ell：x=y=z$ のまわりに 45° 回転して得られる平面の方程式を求めよ。〔『空間内における新しい回転公式』42 号〕

空間内の回転に関する問題です。一般に，行列を利用する解法もあります。関連記事はこちらです。

・『3 次元空間における 1 次変換による不動直線』(64，65 号)

問題 13. 漸化式

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=2,\ a_{n+3}-3a_{n+1}+2a_n=0$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

〔『隣接 4 項間漸化式の一般項について』65 号〕

特性方程式を解くか，それとも，漸化式を行列で表現して固有値を求めるか。実は，どちらも同じものを求めています。関連記事はこちらです。

・『「隣接 4 項間漸化式の一般項について」の別表現』(67 号)

問題 14. 定点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$ を通り x 軸，y 軸の正の部分とそれぞれ P，Q で交わる直線を引くとき次の値の最小値を求めよ。

(1) $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}$　　(2) $\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}$

(3) $\sqrt{\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2}=\mathrm{PQ}$

〔『ある最小問題と包絡線について』48 号〕

いずれも相加・相乗平均の不等式を利用して解くことができます。また定点Aを適当な条件の下で動かすとき，最小値をとる直線 PQ の包絡線は

(1) 双曲線　(2) 放物線　(3) アステロイド

となります。(1)は，入試では「△OPQ の面積」の形で問われることが多いです。

問題 15. $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^3+1)^2}$ を求めよ。

〔『連立積分法について』60 号〕

文字をおき換えて「連立積分法」を利用すると簡単に解けます。関連記事はこちらです。

・『部分分数の積分について』(20 号)

問題 16. 1 から n までの自然数の和が平方数になったとする。このような自然数 n を求めよ。〔『自然数の和と自然数の平方の和から』98 号〕

数列の和に関して素朴に設定された問題ですが，解き進めていくと，Pell 方程式が現れます。

問題 17. 4 チームでリーグ戦を行ったとき，

(1) 1 チームの勝ち点は，何点から何点まであるか。

(2) 4 チームの勝ち点表は何通りあるか。

〔『ワールドカップサッカー 1 次リーグについて』57 号〕

(2)は，母関数のアイディアを利用すると見通しよく計算できます。母関数に関する記事はこちらです。

・『「エジプトひも」がつくる三角形』(71 号)

・『両替問題から因数分解へ』(96 号)

問題 18. n 個の箱が横 1 列に並んでいる。それぞれの箱に赤，青，白のボールのいずれかを 1 つずつ入れる。その際，左から奇数番目の箱には白のボールを入れず，また隣り合う箱には同じ色のボールは入れないようにする。このとき，ボールの入れ方は何通りか。

〔『二項定理から考える作問の工夫』84 号〕

二項定理を利用する解答はエレガントに感じます。

問題 19. ゴンドラが 6 個ある観覧車がある。この 6 個のゴンドラを，赤，青，黄，緑の 4 色で塗装したい。塗装の仕方は何通りあるか。

〔『重複円順列・重複数珠順列について』68 号〕

「バーンサイドの補題」から導かれる公式を利用すれば簡単に答が出せます。関連記事はこちらです。

・『「円組合せ」についての考察』(58 号)

・『同じものを含む円順列について』(93 号)

問題 20. 与えられた円において無作為に 1 つの弦を引くとき，その長さが内接正三角形の 1 辺の長さよりも長くなる確率はいくらか。

〔『同様に確からしいということ』81 号〕

幾何学的確率の定義に基づいて求めますが，どの試行の結果を「同様に確からしい」と仮定するかで答が変わります。この問題とそれに対するいくつかの解釈は「ベルトランの逆説」と呼ばれています。

問題 21. 当たりくじを 3 本含む 10 本のくじの中から引いたくじはもとに戻さないで，A，B，C の 3 人がこの順に 1 本ずつくじを引く。次の確率を求めよ。

⑴　A が当たりであるとき，B が当たる確率。

⑵　B が当たりであるとき，A が当たる確率。

⑶　B が当たりであるとき，C が当たる確率。

〔『くじ引きにおける条件付き確率について』82 号〕

くじ引きの公平性に関する内容。H 29 年度センター試験で問われました。関連記事はこちらです。

・『くじは何番目に引いても当たる確率は同じ』(2 号)

問題 22. n 人のクラスで席替えをした場合，少なくとも 1 人が同じ席になる確率を求めよ。

〔『席替えの問題』12 号〕

テレビドラマで扱われることもある有名題材です。完全順列に関する記事は次の通りです。

・『サイコロの問題と集合』(38 号)

・『完全順列の解法と集合の個数公式』(43 号)

・『$W_{n+1}=nW_n+nW_{n-1}$ の別証』(46 号)

問題 23. 2 人でじゃんけんをして，勝負が決まるまでの回数の期待値を求めよ。

〔『等比級数の話題』73 号〕

じゃんけんや期待値に関する記事はこちらです。

・『硬貨の裏返し』(32 号)

・『取り出した赤玉の個数の期待値』(55 号)

・『「じゃんけん」の授業について』(71 号)

・『点滅正四面体を題材にした確率の問題の探究』(97 号)

問題 24. 1 枚の厚さが 0.1 mm の紙を半分半分と 30 回折ったとき，紙の厚さはどの位になるか。　〔『ざっと計算する』47 号〕

「42 回折ると月まで届く」という話は有名です。常用対数の利用に関する記事はこちら。

・『記号 log を使わない対数の授業』(70 号)

問題 25. 容積が一定なふたのない直方体の形の箱で，表面積が最小となるのはどのようなものか？　〔『節約型の立体は』85 号〕

日本古来の升の形が答に現れます。先人の知恵に触れられる面白い問題です。

問題 26. 天秤と分銅を用いて，ものの重さを 1 グラム単位でもれなく量りたい。量るものと分銅を同じ皿にのせてもよいとすると，分銅の数が次のとき，1 グラムから最高何グラムまでを 1 グラム単位でもれなく量ることができるか？

①分銅が 2 個のとき　②分銅が 10 個のとき
③分銅が n 個のとき

〔『“2 進法”の教材化と授業展開』6 号〕

分銅を別の皿にのせる場合は「2 進法」，同じ皿にのせてもよい場合は「3 進法」が利用できます。

問題 27. 一様な糸の両端を同じ高さに持ってぶら下げたとき，糸はどんな曲線をつくるか。

〔『教科外教科 補助線』19 号〕

曲線の長さと微分方程式の知識があれば，懸垂線（カテナリー）の式を導くことができます。

問題 28. 月の運動の様子を太陽系の外から眺めたら螺旋の輪の様に見えるのだろうか。

〔『衛星が描く軌跡について』10 号〕

一般に，衛星の軌道は，惑星と衛星の公転周期の比によって，次の 3 通りに分類できます。

⑴　螺旋の輪　⑵　凹凸の輪　⑶　凸形の環

問題 29. 座標平面上の 4 分円 $C：x^2+y^2=1$，$x>0$，$y\geqq 0$ の内側が鏡になっている。この鏡に x 軸に平行な光線を当てたときの反射光線の包絡線（すべての反射光線に接するような曲線）を媒介変数表示して，その概形を図示せよ。　〔『新作問題 4 題』19 号〕

コーヒーカップの中に光が当たってできるハート形の曲線の正体です。

問題 30. ある国で都市部と農村部の人口移動を調べたところ，毎年都市部の 10% が農村部へ，逆に農村部の 30% が都市部へ移っているという。この国の総人口は変わらないものとして，100 年後，200 年後，…… はどうなるだろうか。

〔『行列の n 乗で人口の流れを分析する』7 号〕

30 年前に掲載した問題ですが，今の生徒達にも解いてほしい問題です。

§4. 掲載記事で紹介された内容②

次に，定理や公式を見ていきます。§3. と同様に，記事で紹介された定理や公式を再掲載し，関連記事をいくつかご紹介します。詳細は〔　〕内の記事ならびに関連記事をご参照ください。

> 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が整係数で（たすき掛けで）因数分解できる必要十分条件は，判別式 $D=b^2-4ac$ が完全平方数である。
>
> 〔『2次3項式が“たすき掛け”で因数分解可能なのは？』9号〕

2次方程式の解法として，まず因数分解を試み，無理なら解の公式を使います。上記の定理がたすき掛けで因数分解できるかどうかの判定条件になります。これを背景とする内容が第1回共通テストで問われました。たすき掛けの指導法や，解の公式を導く際の注意点を示した記事はこちらです。

- 『左右積法～2次式の因数分解の画期的な方法～』（83号）
- 『2次方程式の解の公式導出について』（43号）　など

> a，b を実数とするとき
>
> $$\max(|a|,\ |b|)=\frac{|a+b|+|a-b|}{2}$$
>
> 〔『Propositionの（再）発見の方法について』13号〕

$\max(a,\ b)=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ はよく知られています。記事では次の派生公式も紹介されています。

$\max(|s+t|,\ |s-t|)=|s|+|t|$

関連記事はこちらです。

- 『絶対値記号を含む不等式について』（76号）　など

> n 次の整式 $f(x)$ が任意の整数 x に対して整数値をとるための必要十分条件は，$f(0)$，$f(1)$，……，$f(n)$ がすべて整数であることである。
>
> 〔『組立除法の応用例』20号〕

n 次の整式 $f(x)$ は，広義の二項係数を用いて，

$$f(x)=b_0\binom{x}{n}+b_1\binom{x}{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}\binom{x}{1}+b_n\binom{x}{0}$$

と表せます。上の条件はこの b_0，b_1，……，b_n がすべて整数であることと同値です。これはニュートンの補間公式と関係があります。関連記事はこちらです。

- 『3点を通る放物線の方程式の求め方』（60号）
- 『3点を通る放物線の方程式について』（68号）　など

> $\mathbb{N}$ を非負整数全体の集合とする。
> a，$b\in\mathbb{N}-\{0\}$，$(a,\ b)=1$ とするとき，
> $ma+nb\,(m,\ n\in\mathbb{N})$ の形で，$(a-1)(b-1)$ 以上の整数はすべて表せて，更に，0，1，2，……，$(a-1)(b-1)-1$ のうち丁度半分だけが
> $\langle a,\ b\rangle=\{ma+nb\,|\,m,\ n\in\mathbb{N}\}$ の要素となる。
>
> 〔『ミレニアム大学入試の背景を探る(3)』42号〕

「単位加法半群 $\mathbb{N}$ の部分半群」に関する定理です。2000年大阪大入試では $3m+5n$ の形で出題され，共通テストの試行調査では $3x+8y$ の形で出題されました。今後も注目したい内容です。

> m，n が互いに素な自然数であるとき，
> $\tan\alpha=\dfrac{n}{m}$ $(m>n)$ であれば，1つの鋭角が 2α である直角三角形はピタゴラスの三角形である。
> また，その3辺の長さの比は
> $(m^2-n^2):2mn:(m^2+n^2)$ である。
>
> 〔『マチンの公式を導いてみる』55号〕

ピタゴラス数に関する記事は多数掲載しています。

- 『FERMATの問題によせて』（5号）
- 『“Pythagoras Number”について』（10号）
- 『整数辺直角三角形』（19号）
- 『美しいピタゴラス数』（35号）
- 『中学生にもわかるピタゴラス数の求め方とその絶大なる効果への驚き』（58号）
- 『既約なピタゴラス数の一般解の再考と $a_n{}^2+b_n{}^2=c_n{}^2$ を満たす数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ について』（67号）
- 『既約ピタゴラス数の存在について』（69号）
- 『ピタゴラス数からピタゴラス数を作る』（83号）
- 『ピタゴラス数をつくる』（92号）　など

> $a=x(x+2y)$，$b=x^2-y^2$，$c=x^2+xy+y^2$
> $(x>y)$ とすれば，$C=60^\circ$ の三角形が得られる。
> $a=y(2x+y)$，$b=x^2-y^2$，$c=x^2+xy+y^2$
> $(x>y)$ とすれば，$C=120^\circ$ の三角形が得られる。
>
> 〔『2次不定方程式の便利な解法』98号〕

答がきれいな問題を作る上で欠かせない内容です。60° や 120° の角をもつ整数三角形の記事はこちら。

- 『$z^2=x^2+y^2\pm xy$ の自然数解』（49号）
- 『60° の角をもつ整数三角形の研究』（84号）
- 『表計算ソフトで遊ぶ』（97号）　など

放物線 $y=ax^2+bx+c$ 上の $x=\alpha$ における点の接線の方程式は $y=ax^2+bx+c-a(x-\alpha)^2$ で与えられる。 〔『面積の公式から』48 号〕

第 1 回共通テストで同内容が問われました。整式の剰余とグラフに関する記事はこちらです。

・『連立方程式を解きたくない』(51 号)
・『割り算で求める接線』(52 号)
・『グラフについて考える』(76 号)　など

複接線をもつ 4 次関数 $y=f(x)$ において，第 3 次導関数 $f'''(x)$ の値が 0 となる x の値を γ とすると，複接線の傾きは $f'(\gamma)$ である。

〔『複接線定理』97 号〕

4 次関数や複接線に関する記事はこちらです。

・『4 次関数のグラフの接線と変曲点に関する性質について』(74，77 号)
・『4 次関数の性質』(22 号)　など

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx=\frac{(-1)^n m!n!(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{(m+n+1)!}$$

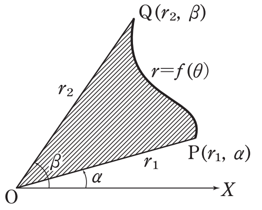
〔『「$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(x-\beta)^n dx$ について」を読んで』41 号〕

言わずと知れた面積公式。関連記事はこちらです。

・『$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{a-p}^{b-p} f(x+p)\,dx$ について』(34 号)
・『3 次関数の指導について』(47 号)
・『3 次関数のグラフと直線で囲まれた図形の面積』(97 号)
・『4 次関数のグラフと面積に関する一考察』(64 号)　など

曲線が極座標で表されている場合，右の図の斜線部分を始線の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V は

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3\sin\theta\, d\theta$$



〔『極座標における回転体の体積の公式について』73 号〕

斜線部分の面積 S が，$S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^2 d\theta$ で表されることはよく知られています。斜軸の周りの回転体の体積の公式と合わせて紹介したい内容です。

・『直線 ℓ の周りの回転体の体積』(37 号)　など

BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ である △ABC について，各頂点の角の二等分線と対辺との交点を D，E，F とするとき

$$\triangle \mathrm{DEF}=\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\triangle \mathrm{ABC}$$

〔『たかが三角形，されど三角形』62，72 号〕

三角形の諸定理に関する記事はこちらです。

・『メネラウス・チェバの定理の拡張について』(19 号)
・『Ceva，Menelaus の定理再考』(21 号)
・『三角形の内心，重心，？心』(27 号)
・『私の数学教材研究ノートから　第 2 回』(49 号)
・『ある条件下にある三角形の面積比』(58 号)
・『内接円と傍接円を用いたヘロンの公式の簡明な証明』(62 号)
・『「三角形の面積」についての一考察』(64 号)
・『垂足三角形の面積について』(64 号)
・『チェバ・メネラウスの定理から導く三角形の不等式』(73 号)
・『二等辺三角形 譚』(78 号)
・『$\sin A+\sin B+\sin C$ から見えるもの』(80 号)
・『三角関数の恒等式と三角形の面積公式との関係』(84 号)

実数係数の多項式

$$p(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

に対して $\displaystyle\max_{-1\leqq x\leqq 1}|p(x)|\geqq\frac{1}{2^{n-1}}$ が成り立つ。

等号成立は $p(x)\equiv\dfrac{T_n(x)}{2^{n-1}}$ のときに限る。

($T_n(x)$ は第 1 種チェビシェフ多項式)

〔『チェビシェフの多項式について』17 号〕

チェビシェフ多項式の関連記事はこちらです。

・『入試の良問と平方剰余の相互法則』(30 号)
・『入試の良問とフィボナッチ数列・リュカ数列』(64 号)
・『チェビシェフの多項式と入試問題』(69 号)
・『チェビシェフ多項式の係数について』(69 号)
・『チェビシェフの多項式と n 倍角の公式』(69 号)　など

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2k\pi}{2n+1}=-\frac{1}{2}$$

$$\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2n+1}=\frac{1}{2^n}$$

〔『余弦の和と積』70 号〕

三角関数の和や積に関する内容です。関連記事はこちらです。

・『入試問題の次数を一般化した命題』(18 号)
・『三角関数についての役に立たない公式』(34，35 号)
・『円周等分点の正弦・余弦の和は 0』(57 号)　など

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^n=n!$$

〔『$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^n=n!$ をご存知でしたか？』59 号〕

上の記事に対しては多くの反響がありました。

- 『$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^n=n!$ の直接的な証明』(61 号)
- 『$n!$ を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表そう』(61 号)
- 『組み分けの総数の種々の公式と $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}{}_n\mathrm{C}_k k^n=n!$ の組合せ論的な意味について』(61 号)　など

$$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k=\begin{cases}[n!e] & (n\geqq 1)\\ 1 & (n=0)\end{cases}$$

〔『$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k$ の値と e が無理数であることの関係』63 号〕

$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k=2^n$ とは違い，$\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{P}_k$ の値はあまり知られていません。

漸化式 $u_0=0$，$u_1=1$；$u_{n+2}=u_n+u_{n+1}$ によって与えられるフィボナッチ数 u_n について

$$u_n=\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{}_{n-1-k}\mathrm{C}_k$$

〔『フィボナッチ数を教室に』41，42 号〕

フィボナッチ数は二項係数の和で表すことができます。フィボナッチ数列に関する記事はこちらです。

- 『フィボナッチ数列と組合せについて』(67 号)
- 『立方数の和が平方数となる整数列』(70 号)
- 『フィボナッチ数列の母関数』(76 号)
- 『数論の練習問題から』(90 号)
- 『フィボナッチ多項式の一般項について』(94 号)
- 『1 項おきのフィボナッチ数列とリュカ数列』(97 号)
- 『ユークリッド互除法とフィボナッチ数列と黄金比の直観的関係』(48 号)　など

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\frac{1}{{}_i\mathrm{C}_{n-2}}\right)=\frac{3}{2}$$

〔『パスカルの三角形のある領域における逆数和』56 号〕

二項係数の和に関する記事はこちら。

- 『二項係数の逆数和』(60 号)
- 『二項係数の公式について』(67 号)　など

隣接 3 項間の漸化式 $a_1=a$，$a_2=b$，$a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ により定義される数列 $\{a_n\}$ を考える。ただし，a，b，p，q は実数とする。数列 $\{a_n\}$ が 3 以上の周期 k をもつための必要十分条件は，特性方程式 $t^2=pt+q$ の 2 つの解が，共役な 1 の原始 k 乗根になることである。

〔『数列の周期について』23 号〕

数列の周期に関する記事はこちらです。

- 『$(a+b\sqrt{m})^n$ の展開式について』(36 号)
- 『「$(a+b\sqrt{m})^n$ の展開式について」を読んで』(40 号)
- 『線形漸化式に変換できる隣接 3 項間分数型漸化式』(83 号)
- 『周期的な数列の一般項を 1 つの式で表すこと』(84 号)

定規とコンパスを用いる作図において

(1)　$\cos 20^\circ$ は作図可能な実数ではない。

(2)　20° の角は作図できない。したがって，60° の角の 3 等分線は作図できない。

(3)　$\sqrt[3]{2}$ は作図可能な実数ではない。

〔『$\cos 20^\circ$ の性質と作図不可能性』79 号〕

有名事実ですが，高校生にもわかりやすく内容が整理されています。作図に関する記事はこちらです。

- 『3 次方程式と三角関数は親せき？』(29 号)
- 『定規とコンパスで角の三等分は何通りできるか？』(33 号)
- 『正 17 角形の代数的解法および幾何的解法』(36 号)
- 『等分方程式と正 n 角形の画き方』(50 号)　など

円錐 $x^2+y^2=z^2\tan^2\alpha$ $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ と平面 $y\cos\theta+z\sin\theta=p$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の切り口である 2 次曲線の離心率を e とすると $e=\dfrac{\cos\theta}{\cos\alpha}$

〔『円錐曲線について』7，8 号〕

円錐曲線に関する記事もいくつか扱いました。

- 『生徒の素朴な質問に思うこと(II)』(55 号)
- 『円錐曲線について』(84 号)　など

シムソン線の包絡線はデルトイドである。

〔『デルトイド一考』20 号〕

包絡線に関する記事はこちらです。

- 『包絡線について』(32 号)
- 『曲線と接線について』(50 号)　など

§5. 掲載記事で紹介された内容③

最後に，アクティブラーニング関連の記事についてまとめます。問題を追加で5題ほど再掲載する形でご紹介します。こちらも詳細は〔　〕内の記事をご参照ください。

問題　点 A(3, 3) と直線 $\ell: 2x+y-4=0$ の距離をできるだけいろいろな方法で求めよ。

〔『数学的な見方・考え方を育てるために』16号〕

アクティブラーニングや深い学びが叫ばれるようになってから，別解を用いた指導法がますます注目されるようになりました。問題の別解や，定理・公式の別証明を集めた記事はこちらです。

- 『‘Analogy’の一例として』(16号)
- 『図にあらわれる「相加平均≧相乗平均」』(19号)
- 『内積に関する異なる7つの証明』(19号)
- 『「高校数学」という文化』(20号)
- 『三角関数の加法定理のある簡単な証明について』(20号)
- 『円すいの体積計算について』(32号)
- 『$\cos 72^\circ$ の値を求めよう』(46号)
- 『中線定理について』(54号)
- 『2数の積が一定のとき和の最小値を求める解法』(63号)
- 『垂直条件 $mm'=-1$ の6つの証明』(73号)
- 『協同的探究学習を用いた授業実践』(85号)　など

問題　△ABC において，$\cos A=\dfrac{2}{3}$，$\cos B=\dfrac{2}{7}$ のとき，$\cos C$ の値を求めよ。

〔『三角形の3つの角に関する問題から』73号〕

記事では3通りの解法を紹介しています。その中で「正弦定理と余弦定理の同値性」の証明の類型が現れます。同値性の証明については他記事で紹介されています。

- 『正弦定理と余弦定理の同値性』(61号)　など

問題　A，Bの2チームが野球の試合を行う。先に4勝した方の優勝とするとき，Aが優勝する勝ち方は何通りあるか。ただし，引き分けはないものとする。

〔『${}_n\mathrm{C}_r$ に関する一考察』50号〕

${}_7\mathrm{C}_4$ で答えが得られます。一体なぜでしょうか。

問題　放物線 $y=x^2+1$ と円 $x^2+y^2=1$ の共有点を計算すると，$y=-2$，1 が出てくる。この $y=-2$ の意味は？

〔『2次曲線の虚空間曲線』44号〕

目に見えないところで曲線が交わっています。関連記事はこちらです。

- 『$x_1x+y_1y=r^2$ と反転について』(39号)
- 『円と放物線の縁』(77号)
- 『円の接線の見方についての考察』(78号)
- 『極が円の内部にあるときの接線について』(81号)　など

問題　次の等式が成り立つように，定数 a の値を定めよ。

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2+(a+1)x-2a-1}{x-a}=4$$

〔『役に立つ豆知識』62号〕

逆の確認が必要な問題です。一般に，下記の同値性が保証されています。なぜ逆を確認する必要があるのでしょうか。理由を考えさせる良い問題です。

連続関数 $g(x)$，$h(x)\,(\neq 0)$ および定数 $C\,(\neq 0)$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{h(x)}=C$ とするとき

$$\lim_{x\to a}h(x)=0 \iff \lim_{x\to a}g(x)=0$$

〔『「必要性，十分性」についての一考察』46号〕

§6. まとめ

以上，一部のタイトルしか紹介できませんでしたが，創刊号から振り返って内容紹介しました。こちらの勉強不足により，上手くまとめられていない部分があるかと存じます。ご意見やご感想，更なる新原稿をお待ちしております。原稿募集やバックナンバーは，弊社HPにて公開しております。この機会に数研通信をご活用いただければ幸甚に存じます。

https://www.chart.co.jp/subject/sugaku/suken_tsushin.html