不定方程式「$x+y=xy$」の拡張について

仁平（にへい） 政一（まさかず）

本稿の目的は数学Ⅰの問題集等でよく見かけるありふれた問題「$x+y=xy$ を満たす整数 x, y の組をすべて求めよ.」の一般化について考察することである. この問題の拡張の手法としては, 文字 x, y の次数の一般化と未知数の個数の一般化が考えられる. まず, 文字の次数についての一般化の考察からはじめる.

1. 不定方程式 $x^n+y^n=x^ny^n$ の解

文字の次数に関する自然な一般化は

「不定方程式 $x^n+y^n=x^ny^n$（n は整数, $n \neq 0$）を満たす整数の組をすべて求めよ.」

であろう. これについては次の結果を得る.

> **定理 1**　不定方程式
>
> $x^n+y^n=x^ny^n$（n は整数, $n \neq 0$）……（Ⅰ）
>
> の整数解の組 (x, y) は次のように与えられる.
>
> (1)　$n=1$ のときは $(0, 0)$, $(2, 2)$
>
> (2)　$n \geqq 2$ のときは $(0, 0)$ のみ.
>
> (3)　$n=-1$ のときは $(a, 1-a)$
>
> 　ここに, a は 0, 1 以外の整数.
>
> (4)　$n \leqq -2$ のときは解なし.

〔証明〕　(ア)　**n が正の整数の場合**

式（Ⅰ）は $(x^n-1)(y^n-1)=1$ と変形できるから, x, y が整数であることに注意すれば

$x^n-1=1$　かつ　$y^n-1=1$　または

$x^n-1=-1$　かつ　$y^n-1=-1$

を得る. ゆえに, $x=y=0$ 以外の整数解は, $n=1$ のときのみ存在し, $x=y=2$ である. したがって, (1), (2) が得られる.

(イ)　**$n=-1$ の場合**

式（Ⅰ）から $x+y=1$ を得る. したがって, (3) が得られる.

(ウ)　**$n \leqq -2$ の場合**

$n=-m$ $(m>0)$ とおく. このとき, 式（Ⅰ）の整数解を求めるには

$$x^m+y^m=1 \quad (x \neq 0,\ y \neq 0,\ m \geqq 2) \quad \cdots\cdots \text{（Ⅱ）}$$

の整数解を求めればよい.

$m=2l$（l は正の整数）のときは, $xy \neq 0$ から

$$x^{2l} \geqq 1,\quad y^{2l} \geqq 1$$

したがって, $x^{2l}+y^{2l} \geqq 2$ となり,（Ⅱ）は整数解を持たない. ゆえに, $m=2l+1$（l は正の整数）のときを考察すればよい. もし $x>0$ かつ $y>0$ とすれば, $x^{2l+1}+y^{2l+1} \geqq 2$ となり,（Ⅱ）は整数解を持たない. また, $x<0$ かつ $y<0$ のときも明らかに解を持たない. ゆえに, $xy<0$ のときのみを考えればよい.

（Ⅱ）は x, y に関する対称式であるから, $x>0$, $y<0$ と仮定してよい. また, $x>0$, $y<0$ のときは, $x^{2l+1}+y^{2l+1}=1$ から, $x>|y|$ と仮定してよい.

そこで, $y=-z$ $(z>0)$ とおき, さらに, $x=z+p$ $(p>0)$ とおけば,（Ⅱ）は

$$(z+p)^{2l+1}-z^{2l+1}=1 \quad \cdots\cdots \text{（Ⅲ）}$$

となる. この式の左辺を 2 項展開すれば

$$p\left(\sum_{k=1}^{2l+1} {}_{2l+1}\mathrm{C}_k z^{2l-k+1} p^{k-1}\right)=1$$

を得る. p, z は正の整数であるから

$$p=1 \text{ かつ } \sum_{k=1}^{2l+1} {}_{2l+1}\mathrm{C}_k z^{2l-k+1} p^{k-1}=1$$

でなくてはならない. したがって,（Ⅲ）が整数解を持つとすれば

$$\sum_{k=1}^{2l} {}_{2l+1}\mathrm{C}_k z^{2l-k+1}=0$$

となる. ところで

$$z>0,\quad {}_{2l+1}\mathrm{C}_k>0 \quad (k=1, \cdots\cdots, 2l)$$

であるから, そのようなことは起こり得ない. したがって,（Ⅲ）すなわち（Ⅱ）は整数解を持たない. ゆえに, 定理は証明された.　▩

2．不定方程式 $x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1x_2\cdots x_n$ の解

不定方程式 $x+y=xy$ の未知数の個数に関する自然な拡張は,

「不定方程式

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=x_1x_2\cdots x_n\ (n\geqq 2)\quad\cdots\cdots\ (\mathrm{IV})$$

を満たす正の整数解を求めよ.」

という問題であろう.

本節では (IV) の解について考察する. なお, (IV) は $x_1\geqq x_2\geqq\cdots\cdots\geqq x_n$ と仮定しても一般性は失われないので, 以下そのように仮定する.

> **命題 1**　不定方程式 $x_1+x_2+x_3=x_1x_2x_3$ の正の整数解の組は (3, 2, 1) に限る.

〔証明〕　$x_1\geqq x_2\geqq x_3$ であるから

$$x_1x_3^2\leqq x_1x_2x_3=x_1+x_2+x_3\leqq 3x_1$$

$x_1>0$ から　$x_3^2\leqq 3$　　ゆえに　$x_3=1$

したがって, 与えられた方程式は $x_1x_2=x_1+x_2+1$ となる. これを, $(x_1-1)(x_2-1)=2$ と変形することにより, 求める解を得る.　▩

> **定理 2**　$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\ (n\geqq 2)$ が互いに相異なるならば, 不定方程式 (IV) が解を持つための必要十分条件は $n=3$ である.

〔証明〕　必要条件は命題 1 より明らかであるから, 十分条件を証明すればよい. 不定方程式 (IV) が解を持ち, その解を $x_1>x_2>\cdots\cdots>x_n$ とする.

$x_n\geqq 1$ であるから

$$x_1x_2\cdots\cdots x_n\geqq x_1(n-1)!\quad\cdots\cdots\ ①$$

また

$$x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n<nx_1\quad\cdots\cdots\ ②$$

① と ② から

$$n>(n-1)!\quad\cdots\cdots\ ③$$

③ は $n\geqq 4$ では成立しない. ゆえに, $n=3$ または $n=2$ である. $n=2$ のときは, 定理 1 から相異なる整数解を持たないことがわかる. したがって, $n=3$ のときのみ相異なる整数解を持つ.　▩

定理 2 は大学入試問題として出題されている (文献 [1] を参照).

次に, $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ が必ずしも相異なるとは限らない場合を考察しよう.

> **命題 2**　$n\geqq 3$ のとき, 不定方程式 (IV) は
> $(n, 2, 1, \cdots\cdots, 1)$　　$\cdots\cdots$ ④
> なる解を持つ.

〔証明〕　$x_3=x_4=\cdots\cdots=x_n=1$ とおくと, 不定方程式 (IV) は, $x_1+x_2+(n-2)=x_1x_2$ となる. これは $(x_1-1)(x_2-1)=n-1$ と変形できるので求める結果が得られる.　▩

次に, (IV) の解を求める 1 つの手だてを考える. そこで 1 つの補助定理を準備する.

> **補助定理**　不定方程式 (IV) において $x_{p+1}=x_{p+2}=\cdots\cdots=x_n=1$ のとき, $n+p<2^p$ $(2\leqq p\leqq n)$ ならば, 解は $x_p=1$ に限られる.

〔証明〕　仮定から

$$x_1x_2\cdots\cdots x_p=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_p+(n-p)$$

となる. ゆえに, $x_1\geqq 2$ であることに注意すれば

$$x_1x_p^{\,p-1}\leqq x_1x_2\cdots\cdots x_p\leqq px_1+(n-p)$$

$$\leqq px_1+\frac{(n-p)x_1}{2}=\frac{(n+p)x_1}{2}$$

したがって　　$x_p^{\,p-1}\leqq\dfrac{n+p}{2}$

ゆえに

$$x_p\leqq\left(\frac{n+p}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

となり, $n+p<2^p$ ならば, $1\leqq x_p<2$ を得る. したがって, $x_p=1$ を得る.　▩

> **系**　$2^{p-1}-(p-1)\leqq n<2^p-p\ (n\geqq 3,\ n\geqq p)$ を満たすすべての n に対して, $x_p=1$ である.

補助定理と系を用いて, $n=4$ の場合の解を求めてみよう.

例題　$n=4$ のとき, 不定方程式 (IV) の整数解の組は (4, 2, 1, 1) だけである.

〔証明〕　上記の系で $p=3$ とすれば, $n=3, 4$ を得る. したがって, 補助定理から, $n=4$ の場合の解は $x_3=x_4=1$ という形をしていることがわかる. ゆえに, 方程式 (IV) は, $x_1+x_2+2=x_1x_2$ となる. これを $(x_1-1)(x_2-1)=3$ と変形すれば, 求める結果が得られる.　▩

同様にして次の定理が得られる．

定理 3　$5 \leqq n \leqq 11$ に対して，不定方程式 (IV) は，$n=6$ のときの解は ④ のみであるが，その他の場合については，④ 以外に次のような解を持つ．

$n=2m-1$ $(m \geqq 3)$ のとき $(m, 3, 1, \cdots\cdots, 1)$,
$n=3m-1$ $(m \geqq 2)$ のとき $(m, 2, 2, 1, \cdots\cdots, 1)$,
$n=3m-2$ $(m \geqq 4)$ のとき $(m, 4, 1, \cdots\cdots, 1)$
ここに，m は正の整数．

〔証明〕　系において，$p=4$ とすると　$5 \leqq n < 12$ となる．ゆえに，$5 \leqq n \leqq 11$ に対しては，不定方程式 (IV) のどの解も

$$x_4 = x_5 = \cdots\cdots = x_n = 1$$

である．したがって

$$x_1x_2x_3 = x_1 + x_2 + x_3 + k \ (k=2, \cdots\cdots, 8) \quad \cdots\cdots ⑤$$

を解けばよい．⑤ から

$$x_1x_3^2 \leqq 3x_1 + k \leqq 3x_1 + \frac{kx_1}{2} = \left(3+\frac{k}{2}\right)x_1$$

を得る．ゆえに

$$x_3 \leqq \sqrt{3+\frac{k}{2}} \quad \cdots\cdots ⑥$$

ところで，$2 \leqq k \leqq 8$ であるから，⑥ より $x_3 \leqq 2$ を得る．したがって，$x_3=1$ または $x_3=2$ であることがわかる．
いま，$n=5$ の場合の解を求めてみよう．$x_3=1$ のときは，⑤ は $x_1+x_2+3=x_1x_2$ となる．この式を $(x_1-1)(x_2-1)=4$ と変形することにより，2 つの解の組 (5, 2, 1, 1, 1), (3, 3, 1, 1, 1) を得る．
次に，$x_3=2$ とすると，⑤ は　$2x_1x_2=x_1+x_2+4$ となる．

この式を，$2x_1 = 1 + \dfrac{9}{2x_2-1}$ と変形して，$(2x_2-1)$ が 9 の約数でなくてはならないことに注意すれば，(2, 2, 2, 1, 1) なる解を得る．他の場合も同様である．　▩

次第に繁雑にはなるが，$n \geqq 12$ の場合も，同じ手順で (IV) の解を求めることができる．

3．不定方程式 $x_1{}^l + x_2{}^l + \cdots + x_n{}^l = x_1{}^l x_2{}^l \cdots x_n{}^l$ の解

不定方程式 (IV) は
「$x_1{}^l + x_2{}^l + \cdots\cdots + x_n{}^l = x_1{}^l x_2{}^l \cdots\cdots x_n{}^l$
　　(l は正の整数，$n \geqq 2$)　…… (V)
の正の整数解を求めよ．」
という問題に自然に拡張できる．

定理 2 と同じ条件をつければ，同様な結果が得られる．

定理 4　$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ $(n \geqq 2)$ が互いに相異なるならば，不定方程式 (V) が正の整数解を持つための必要十分条件は　$l=1$,　$n=3$　である．

〔証明〕　必要条件は明らかであるから，十分条件のみを示せばよい．定理 2 の証明と全く同様にして

$$n > \{(n-1)!\}^l \quad \cdots\cdots ⑦$$

を得る．ところで，一般に，不等式「$(n-1)^2 > n$ $(n \geqq 3)$」が成立するので，2 以上の正の整数 l に対して，⑦ が成立するとすれば，それは　$n=2$ のときである．この場合は，定理 1 から相異なる解を持たないことがわかる．したがって，(V) が相異なる整数解を持つ可能性があるのは　$l=1$　のときである．この場合は定理 2 に帰着する．　▩

$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$ が必ずしも相異なるとは限らない場合には次の命題が成立する．

命題 3　不定方程式 (V) は，

$$n=(p^l-1)(q^l-1)+1$$

(p, q は 2 以上の任意の正の整数) のとき，
$(p, q, 1, \cdots\cdots, 1)$ なる解を持つ．

4．参考文献

[1]　数学セミナー　1979,　9 月号，p 111，日本評論社
[2]　数学セミナー　1984,　5 月号，p 120 (拙著)，日本評論社
[3]　北村泰一著　数論入門 (改訂版)，槇書店　1986

(茨城県立藤代高等学校)