"Pythagoras Number" について

山口(やまぐち) 悦彦(よしひこ)

a, b, c を自然数とする．

$$a^2+b^2=c^2 \qquad \cdots\cdots (※)$$

(※) をみたす自然数 a, b, c のことを"ピタゴラスの数"という．

例えば

a, b, c： 3, 4, 5 ； 5, 12, 13 ； 8, 15, 17；……

などはピタゴラスの数である．

(注) この名称は，直角三角形の3辺の長さのみたす有名なピタゴラスの定理に関係して名付けられただけのようである．

そこで，問題はピタゴラスの数をすべて求めること，すなわち a, b, c の**一般解**を求めることにある．そのために，いくつかの準備をしておく：

自然数 x, y が互いに素（1以外に公約数をもたない）であることを，$(x, y)=1$ と書くことにする．

補 題 1

整数 x, y, z の間に

$$x=y\pm z$$

なる関係があるとき，次のことが成り立つ：

[1] x：偶数 $\Longrightarrow \begin{cases} y：偶数，z：偶数 \\ または \\ y：奇数，z：奇数 \end{cases}$

[2] x：奇数 $\Longrightarrow \begin{cases} y：偶数，z：奇数 \\ または \\ y：奇数，z：偶数 \end{cases}$

[3] y：奇数，z：奇数 $\Longrightarrow x$：偶数

補 題 2

xを整数とするとき，次のことが成り立つ：

[1] x：偶数 $\Longleftrightarrow x^2$：偶数

[2] x：奇数 $\Longleftrightarrow x^2$：奇数

補 題 3

自然数 x, y, z において，pを素数として

$$x^2=p^2z$$

の関係があるとき，ある自然数nにより

$$x=pn$$

と表される．

補 題 4

自然数 x, y, z について

$$x^2=yz,\quad (y, z)=1$$

のとき，y, z はある自然数の平方である．すなわち，$y=m^2$, $z=n^2$ (m, n は自然数) と表される．

補 題 5

自然数 x, y について

$$(x, y)=1 \Longleftrightarrow (x^2, y^2)=1$$

これらの補題を用いて，次の"ピタゴラスの数"に関する定理を証明する：

[定　理]

a, b, c が1以外に公約数をもたないピタゴラスの数である

$\Longleftrightarrow$（必要十分条件）

$$a=x^2-y^2,\quad b=2xy,\quad c=x^2+y^2 \qquad \cdots\cdots (0)$$

で与えられ，x, y は $(x, y)=1$ なる自然数で，一方は奇数，他方は偶数で，$x>y$ である

(注) a, b, c が1以外に公約数をもたないという仮定はしごくもっともで，もし，a, b, c が1以外の公約数nをもてば

$$a=na',\quad b=nb',\quad c=nc'$$

と書くことができて，これを (※) に代入すれば

$$a'^2+b'^2=c'^2$$

となり，a', b', c' もまたピタゴラスの数になる．

逆に，a, b, c がピタゴラスの数であれば，任意の自然数nについて，na, nb, nc もまたピタゴラスの数になる．

よって，1以外に公約数をもたないピタゴラスの

数を求めればよい.

[証　明]

$\Longrightarrow$ (必要性の証明):

1) c が偶数の場合

補題1の [1] および2により

① a, b はともに偶数である か ② a, b はともに奇数である.

① a, b がともに偶数ならば, a, b, c は2という公約数をもつことになり, 仮定に反する.

② a, b がともに奇数ならば

$$a=2a'+1,\quad b=2b'+1$$

という形にかけて

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(2a'+1)^2+(2b'+1)^2\\&=4(a'^2+b'^2+a'+b')+2\end{aligned}$$

よって, これは4で割ると2余る数である.

他方, c は $2c'$ という形をしているから

$$c^2=(2c')^2=4c'^2$$

これは4で割り切れる数である.

したがって, $a^2+b^2=c^2$ となることは決してあり得ない.

以上をまとめれば, c が偶数であるようなピタゴラスの数は1組もないということになる.

2) c が奇数の場合

補題1の [2] および2により

a, b の一方は奇数, 他方は偶数でなくてはならないが, どちらでも同じことだから, a を奇数, b を偶数 とする.

(※) より

$$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a) \qquad \cdots\cdots (1)$$

ところで, $b=2b'$ とかけるから

$$4b'^2=(c+a)(c-a) \qquad \cdots\cdots (2)$$

c, a はともに奇数だから, 補題1の [3] より

$c+a$, $c-a$ はともに偶数.

よって, d, e を自然数として,

$$c+a=2d,\quad c-a=2e \qquad \cdots\cdots (3)$$

と書くことができる.

したがって, (2), (3) より

$$4b'^2=4de \qquad \cdots\cdots (4)$$

すなわち　$b'^2=de$

ところで, d, e がある素数 p で割り切れれば

$$d=pd',\quad e=pe' \qquad \cdots\cdots (5)$$

と書けて, (3) により c, a について解くと

$$c=d+e,\quad a=d-e$$

となり, (5) を代入すると

$$c=p(d'+e'),\quad a=p(d'-e')$$

より, c, a は p で割り切れる. したがって, これを (1) に代入すると

$$b^2=p^2(d'^2-e'^2)$$

という式になり, 補題3により, b も p で割り切れることになり, 仮定に反するから, d, e は公約数 p をもたない. また, 他の素数で割り切れたとしても, 同じ議論により, 仮定に反するので, 結局, d, e は1以外の公約数をもたない.

すなわち, $(d,\ e)=1$

したがって, 補題4により

$$d=x^2,\quad e=y^2 \quad (x,\ y \text{ は自然数}) \qquad \cdots\cdots (6)$$

と書くことができる.

ここで, 補題5により, $(x,\ y)=1$ であることは明らかである.

したがって, (3) より

$$c+a=2x^2,\quad c-a=2y^2$$

これを a, c について解けば

$$a=x^2-y^2 \qquad \cdots\cdots (7)$$

$$c=x^2+y^2 \qquad \cdots\cdots (8)$$

また, a (または c) は奇数であるから, (7) (または (8)) と補題1の [2] および2により, x, y の一方は奇数で, 他方は偶数である.

b については, $b=2b'$ で (4), (6) により

$$b^2=4b'^2=4x^2y^2$$

$$\therefore\quad b=2xy$$

最後に, (7) と $a>0$ より

$$(x-y)(x+y)>0$$

よって, $x>y$

以上で, 必要性の証明を終わる.

$\Longleftarrow$ (十分性の証明):

まず, (0) が (※) をみたすことを示す:

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(x^2-y^2)^2+(2xy)^2\\&=(x^2+y^2)^2=c^2\end{aligned}$$

次に, a, b, c は1以外に公約数をもたないことを示す:

$b=2xy$ より b は偶数であることがわかる. また, x, y の一方は奇数で, 他方は偶数であるから,

x を偶数, y を奇数

とすれば, $x=2m$, $y=2n+1$ と表すことができて,

$$a=x^2-y^2$$
$$=(2m)^2-(2n+1)^2$$
$$=4(m^2-n^2-n)-1$$
$$c=x^2+y^2$$
$$=(2m)^2+(2n+1)^2$$
$$=4(m^2+n^2+n)+1$$

となり，a, c は偶数でないことは明らかである．ゆえに，a, b, c は 2 という公約数をもたず，したがって，偶数である公約数をもたない．

では，次に，a, b, c が奇数である公約数をもつものとすれば，明らかに奇数の素数（すなわち，2 以外のある素数）p を公約数としてもつ：

（a, c に注目して）

$$c=c'p,\quad a=a'p$$

(0) より　$c+a=2x^2$,　$c-a=2y^2$

これに代入すると

$$2x^2=p(c'+a'),\ 2y^2=p(c'-a')$$

となり，$2x^2$, $2y^2$ は p で割り切れる．

p は 2 でない素数だから，x^2, y^2 ともに p で割り切れる（すなわち，x^2, y^2 は p を約数にもつ）．

ところが，仮定より

$(x,\ y)=1$　　だから　　$(x^2,\ y^2)=1$

よって，矛盾する．

したがって，偶数，奇数の約数をもたないので，a, b, c は 1 以外の公約数をもたない．

以上で定理の証明を終わる．

※ この定理を用いれば，次のようにピタゴラスの数を求めることができるだろう．

① $x>y$ とし，x を偶数，y を奇数とすると，以下のようになる．

x	y	a	b	c	
2	1	3	4	5	
4	1	15	8	17	
4	3	7	24	25	
6	1	35	12	37	
6	5	11	60	61	
8	1	63	16	65	
8	3	55	48	73	
8	5	39	80	89	
8	7	15	112	113	など．

② $x>y$ とし，x を奇数，y を偶数とすると，以下のようになる．

x	y	a	b	c	
3	2	5	12	13	
5	2	21	20	29	
5	4	9	40	41	
7	2	45	28	53	
7	4	33	56	65	
7	6	13	84	85	
9	2	77	36	85	
9	4	65	72	97	
9	6	45	108	117	など．

[参考文献]
[1]　松本　誠「入試数学演義」　　現代数学社（1973）
[2]　高木貞治「初等整数論講義（第 2 版）」　共立出版（1971）

（札幌東高等学校）