衛星が描く軌跡について

坂本　茂（さかもと　しげる）

月の運動の様子を太陽系の外から眺めたら螺旋の輪の様に見えるのだろうか．時々そのような図を載せている本を見かけたことがあったが実際はどうなのだろう．太陽の周りを回る惑星のさらにその周りを回る衛星を天の北極の方向から眺めるとどのような軌道上を運行するように見えるか調べることにした．この場合に螺旋の輪も含めて次の3つの軌道の形が考えられると思う．

(1)　螺旋の輪になる場合，順行と逆行が起こる．
(2)　蛇行しながら波のある輪になる場合，凹凸のある輪である．
(3)　完全な環になる場合，凸形の輪である．

惑星の公転周期に比べて衛星が速く公転すれば螺旋形になるだろうが，ゆっくり公転していれば3番目の様な輪になるのだろうか．

Dを太陽Sと衛星Mとの間の距離，またmを衛星の太陽に対する回転角とすると，衛星Mの座標M$(x,\ y)$は

$$x=D\cos m,\qquad y=D\sin m$$

と書けるが，x，y，D，mを時間tで微分したものをそれぞれ$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{D}$，$\dot{m}$で表せば，衛星Mの速度ベクトル$v(\dot{x},\ \dot{y})$の成分は

$$\dot{x}=\dot{D}\cos m-D\dot{m}\sin m$$
$$\dot{y}=\dot{D}\sin m+D\dot{m}\cos m$$

となる．衛星Mの位置と速度から

$$D^2\dot{m}=x\dot{y}-\dot{x}y$$

となる関係式が導かれる．$\dot{m}$は衛星の太陽に対する角速度であるから，この値が正ならば順行，負ならば逆行している時である．

次に，衛星の速度ベクトル$v(\dot{x},\ \dot{y})$の大きさをvとすると衛星Mの速度の成分は

$$\dot{x}=v\cos\theta,\qquad \dot{y}=v\sin\theta$$

と表すことができる．θは速度の向きを示す角であって時間tの関数である．さらに微分して加速度は

$$\ddot{x}=\dot{v}\cos\theta-v\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\ddot{y}=\dot{v}\sin\theta+v\dot{\theta}\cos\theta$$

となる．速度と加速度から

$$v^2\dot{\theta}=\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}$$

となる関係式が導かれる．$\ddot{x}$，$\ddot{y}$はそれぞれx，yをtで2回微分したものである．$\dot{\theta}$が正ならば正の向きに，負ならば負の向きに曲がろうとしている時である．交互に正負になれば軌道は蛇行している曲線である．

$\dot{m}$，$\dot{\theta}$を使って3つの軌道の場合を説明すると

(1)　螺旋の輪の形

$\dot{m}$が負となることもあり，$\dot{\theta}$が常に正または常に負．

(2)　凹凸の輪の形

$\dot{\theta}$が正になったり負になったりし，$\dot{m}$が常に正．

(3)　凸形の環の形

$\dot{m}$が常に正で，$\dot{\theta}$も常に正．

と書き表すことができるであろう．では，どの様な時に3つの場合になるのか計算してみよう．

惑星Pと衛星Mの軌道半径をそれぞれR，rとし，角速度をそれぞれW，wとすれば，時間tでの衛星の座標M$(x,\ y)$は，

$$\overrightarrow{\mathrm{SP}}=(R\cos Wt,\ R\sin Wt)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=(r\cos wt,\ r\sin wt)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{SM}}=\overrightarrow{\mathrm{SP}}+\overrightarrow{\mathrm{PM}}$$

であるから

$$x=R\cos Wt+r\cos wt$$
$$y=R\sin Wt+r\sin wt$$

と書ける．ただし惑星と衛星の軌道面は同じ平面であり，惑星Pと衛星Mはそれぞれ円運動をしているものとするからR，r，W，wは一定である．太陽Sと衛星Mの距離の2乗は

$$D^2=x^2+y^2=R^2+r^2+2Rr\cos\{(W-w)t\}$$

である．t で x，y を微分するとそれぞれ

$$\dot{x}=-RW\sin Wt-rw\sin wt$$

$$\dot{y}=\quad RW\cos Wt+rw\cos wt$$

となるから，衛星の速度の大きさの２乗は

$$\begin{aligned} v^2&=\dot{x}^2+\dot{y}^2 \\ &=R^2W^2+r^2w^2+2RrWw\cos\{(W-w)t\} \end{aligned}$$

である．そして

$$v^2\geqq(R|W|-r|w|)^2\geqq 0$$

であるから

$$|w|=\frac{R}{r}|W|, \qquad (W-w)t=\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{2}+2n\pi$$

のとき v は零になる．ここで n は整数であり，複号は積 Ww の正負と一致する．したがって，惑星と衛星の公転の向きが同じなら衛星は太陽と惑星の間に，公転の向きが逆なら惑星は太陽と衛星の間に一直線上に並んでいることになる．

太陽と衛星の距離 D が零となることはないので，衛星の太陽に対する角速度 $\dot{m}$ の正負は次の式からわかるであろう．

$$\begin{aligned} D^2\dot{m}&=x\dot{y}-\dot{x}y \\ &=R^2W+r^2w \\ &\quad +Rr(W+w)\cos\{(W-w)t\} \end{aligned}$$

x，y をそれぞれ t で２回微分して

$$\ddot{x}=-RW^2\cos Wt-rw^2\cos wt$$

$$\ddot{y}=-RW^2\sin Wt-rw^2\sin wt$$

となり

$$\begin{aligned} v^2\dot{\theta}&=\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y} \\ &=R^2W^3+r^2w^3 \\ &\quad +RWrw(W+w)\cos\{(W-w)t\} \end{aligned}$$

である．v が零でなければこの式の正負から衛星の曲がろうとする向きがわかるであろう．また加速度 $\dot{v}(\ddot{x},\ \ddot{y})$ の大きさの２乗は

$$\begin{aligned} \dot{v}^2&=\ddot{x}^2+\ddot{y}^2 \\ &=R^2W^4+r^2w^4+2RrW^2w^2\cos\{(W-w)t\} \end{aligned}$$

である．この式は負にはならないが，次の特別な場合に零になる．

$$w^2=\frac{R}{r}W^2, \qquad (W-w)t=(1+2n)\pi$$

n は整数であり，太陽と衛星と惑星がこの順序で丁度一直線に並んだとき加速度が零となり，太陽からの引力と惑星からの引力がつり合った所に衛星が存在していることになる．もちろんこの時は力が働かないのだから，衛星は直線運動をしようとし $\dot{\theta}$ は零である．実際に計算してみても，このときには v は零でないが $v^2\dot{\theta}$ は零になることがわかる．

今まで述べてきたこれらの式から実際の衛星がどんな軌道を描くか計算できる．例えば，地球と太陽の距離は月と地球の距離のおよそ400倍，そして１年は12ヶ月であるから $R=400r$，$w=13W$ の関係で月は公転している．上記の式で計算すれば

$$D^2\dot{m}=(160000+5600\cos 12Wt)r^2W>0$$

$$v^2\dot{\theta}=(162000+72800\cos 12Wt)r^2W^3>0$$

となる．$\dot{m}$ と $\dot{\theta}$ は t に関わりなく常に正の値であるから，地球に対する月は(3)の場合である．螺旋を描いたり蛇行したりはしないのである．軌道は凸形の輪であり，ただ僅かに曲率が変わるだけであって正多角形の角を丸めたような曲線である．太陽の周りに円形の月の軌道を描いて，あることの説明をしているとき不思議に思われて，では地球の軌道はどこにあるのかと聞かれた．そのとき地球の軌道も一緒に描くのは大変難しいことであった．

(3)の場合になる実際の例は見つかったのであるが，その他の場合も起こるのだろうか．惑星の周りを回る衛星の軌道がどのような時に(1)や(2)の場合になるかは，R，r，W，w の間の関係により決まってくる．これを調べるために $R>r>0$，$W>0$，として考えてよいから，この条件のもとで w のとる値によってどのような場合になるかを計算しよう．木星の外側の衛星などのように惑星の公転方向とは逆向きに公転する衛星もあるので w は負でもかまわないことにする．

まず最初に，衛星が常に順行する場合，あるいは常に逆行する場合，即ち衛星が常に太陽に対して一定の向きに運行するときには角速度 $\dot{m}$ が常に正あるいは常に負

$$\forall t,\ \dot{m}>0 \quad \text{または} \quad \forall t,\ \dot{m}<0$$

である．このためには先にあげた $D^2\dot{m}$ の式により

$$|R^2W+r^2w|>|Rr(W+w)|$$

でなければならない．この式は正であるから両辺を２乗して整理し

$$(R^2-r^2)(R^2W^2-r^2w^2)>0$$

となる．したがって

$$|w|<\frac{R}{r}W$$

であることが，太陽に対し一定の向きに運行するた

めの必要十分な条件であるが，またこの条件は衛星が常に順行するための必要で十分な条件でもあることがわかる．すなわち $\dot{m}$ が常に正，および常に負の場合で必要なことは，さらに

$$R^2W+r^2w$$

がそれぞれ正および負となることである．前の条件式のもとでは，この式は必ず正となるが負には決してならない．$\dot{m}$ が常に負で衛星が常に逆行することは実際起こりえないが，このことからもわかる．

ここで

$$w>-\left(\frac{R}{r}\right)^2W,\qquad w<-\left(\frac{R}{r}\right)^2W$$

のそれぞれの場合は，$\dot{m}$ が正の時間がより長いか，$\dot{m}$ が負の時間がより長いかの条件を表している．

次に軌道の曲がり方が常に一定，即ち速度方向の変化 $\dot{\theta}$ が常に正，あるいは常に負

$$\forall t,\ \dot{\theta}>0 \quad \text{または} \quad \forall t,\ \dot{\theta}<0$$

となるためには先にあげた $v^2\dot{\theta}$ の式により

$$|R^2W^3+r^2w^3|>|RWrw(W+w)|$$

でなければならない．この式は正であるから両辺を2乗して整理すると

$$(rw-RW)(rw+RW)(rw^2-RW^2)(rw^2+RW^2)>0$$

となるから

$$|w|>\frac{R}{r}W \qquad \text{または} \qquad |w|<\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{2}}W$$

であることが必要で十分である．この場合 $\dot{\theta}$ が常に正または常に負となるときは，さらに

$$R^2W^3+r^2w^3$$

がそれぞれ正または負になることである．

したがってそれぞれ

$$w>-\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{2}{3}}W,\qquad w<-\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{2}{3}}W$$

のときであるが，この条件だけについていえば $\dot{\theta}$ が正である時間がより長いか，$\dot{\theta}$ が負である時間がより長いかの場合である．

以上のことから，$\dot{\theta}$ が常に正であるための条件は

$$w>\frac{R}{r}W \qquad \text{または} \qquad |w|<\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{2}}W$$

であり，$\dot{\theta}$ が常に負であるための条件は

$$w<-\frac{R}{r}W$$

である．

したがって，$W>0$，$k=\dfrac{R}{r}>1$ とするとき，$\dfrac{w}{W}$ が

$$-k^2<-k<-k^{\frac{2}{3}}<-k^{\frac{1}{2}}<k^{\frac{1}{2}}<k$$

の値をとるところで，衛星の描く曲線の様子も変化していく．

3つの軌道の形を考えていたが，以上の結果からわかる $\dot{m}$，$\dot{\theta}$ の正負，および v が零になるときを考慮して，天の北極から眺めた衛星の軌道を次の場合に分けることができる．

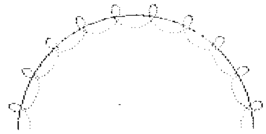
(i) 螺旋の輪の形：

$$|w|>\frac{R}{r}W$$

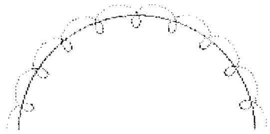
$w>0$ のときは正の向きの螺旋，$w<0$ のときは負の向きの螺旋で

$$w<-\left(\frac{R}{r}\right)^2W$$

のときは逆行している時間が長いことになる．r が R に比べて小さいので天体では起こらないであろう．



$w<Wk$

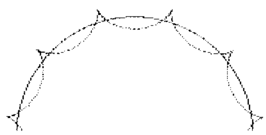


$w>Wk$

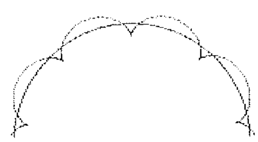
(ii) 花または星の形：

$$|w|=\frac{R}{r}W$$

2つの場合のうち w が正の時には尖点が太陽側を向く花形を，w が負のとき尖点は外側を向き星形を描く．尖点では速度が零である．



$w=-Wk$



$w=Wk$

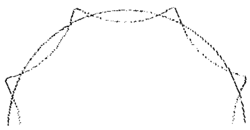
(iii)　凹凸の輪の形：

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{2}} W < |w| < \frac{R}{r} W$$

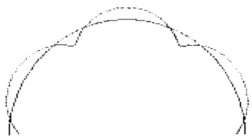
この波形でwが正のときは内側にカーブしている時間のほうが外側にカーブしている時間より長いのであるが，wが負であっても

$$w > -\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{2}{3}} W$$

ならばこのことが言える．



$-Wk^{\frac{2}{3}} > w > -Wk$



$Wk^{\frac{1}{2}} < w < Wk$

(iv)　凸形の環の形：

$$|w| \leqq \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{2}} W$$

ここで等号が成り立つとき，太陽に近づいた所では曲率が一瞬ではあるが零になり，直線的に運行しているように見える．

$|w| < Wk^{\frac{1}{2}}$

以上4つの場合に分けた．

地球の衛星・月は $R=400r$，$w=13W$ であったから

$$\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{1}{2}} W = \frac{20}{13} w > w$$

が成り立ち，(iv) の場合になることがこれからもわかる．そのほかの衛星について少し例をあげてみる．木星の一番内側のガリレオ衛星イオは(i)の螺旋の輪になることが $R=1840r$，$w=2450W$ の関係からわかる．海王星の衛星トリトンは逆向きに公転していて $R=12700r$，$w=-10200W$ の関係があり，計算によると(iii) の場合の波形の軌道をとり太陽側にカーブしている時間の方が短い．

太陽の周りを回りながら自転している惑星上の1点も，自転軸が傾いていないならば天の北極から見るとこのような曲線になる．例えば，地球の赤道上の地点の軌跡は(iii) の形の波形を描く．

これらの曲線は，半径aの円周上を半径bの円が転がるときに 半径bの中心からdだけ離れた点の軌跡

$$x=(a+b)\cos\xi + d\cos\left(\frac{a+b}{b}\right)\xi$$

$$y=(a+b)\sin\xi + d\sin\left(\frac{a+b}{b}\right)\xi$$

として定義されるサイクロイドと呼ばれる曲線であって，dはbより大きくてもかまわない．上の場合に当てはめれば

$$a+b=R,\ d=r,\ \frac{W}{w}=\frac{b}{R}=\frac{b}{a+b}$$

である．幾何学的にはR，r，W，wは互いの大きさや正負を考慮しなくても実数なら数式は図形において意味を持つものである．

なお，これまでに考えたことを表にまとめると，次のようになる．

$\frac{w}{W}$	場合	軌跡の様子　$\left(k=\frac{R}{r}>1\right)$
…	(i)	正の向きの螺旋
k	(ii)	花の形，尖点が内側
…	(iii)	内側に曲がっている時間が長い凹凸の輪
$k^{\frac{1}{2}}$	(iv)	太陽に近い所で直進する凸形の環
…	(iv)	凸形の環
$-k^{\frac{1}{2}}$	(iv)	太陽に近い所で直進する凸形の環
…	(iii)	内側に曲がっている時間が長い凹凸の輪
$-k^{\frac{2}{3}}$	(iii)	内側，外側のカーブの時間は同じ凹凸の輪
…	(iii)	外側に曲がっている時間が長い凹凸の輪
$-k$	(ii)	星の形，尖点が外側
…	(i)	順行の時間が長い負の向きの螺旋
$-k^2$	(i)	順行と逆行が同じ長さの負の向きの螺旋
…	(i)	逆行の時間が長い負の向きの螺旋

（東京都立鷺宮高等学校）