大学での微積分（上）

宮川（みやがわ） 幸隆（ゆきたか）

§1. 積分可能性

例えば，曲線 $y=x^2$ と x 軸および直線 $x=1$ によって囲まれた部分の“面積”などといって，境界の一部あるいは全部が曲線であるような図形の“面積”というものが天賦のものであるという立場に立って，高校数学では曲線によって囲まれた図形の“面積”を論じたが，果たして，どんな曲線で囲まれた図形でも“面積”をもち得るであろうか？　そもそも曲線で囲まれた図形の“面積”とは一体何であろうか？　そもそも曲線とは何か？　このような根源的な問いかけによる高校数学への反省から本稿を始めることにしよう！

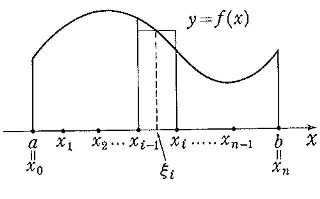
さて，“曲線”の定義はいずれきちんと行わなければならないが，閉区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ のグラフ

$$\{(x,\ f(x))\mid a\leqq x\leqq b\} \tag{1}$$

は立派な“曲線”であると断言しても異論を差し挟む者はいないであろう．今，この曲線(1)が x 軸よりも上にあるとき，すなわち

$$f(x)\geqq 0\ \ (a\leqq x\leqq b)$$

であるとき，この曲線(1)と x 軸および2つの直線 $x=a$, $x=b$ によって囲まれる図形の“面積”とは一体何であろうか？　何であるべきか？　……と考えていくことにしよう：



区間 $[a,\ b]$ 内に，$n+1$ 個の点 x_0, x_1, x_2, ……, x_{n-1}, x_n を

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

であるようにとって，区間 $[a,\ b]$ を n 個の小区間 $[x_0,\ x_1]$, $[x_1,\ x_2]$, ……, $[x_{n-1},\ x_n]$ に分割する．そして，$n+1$ 個の点の集合

$$\Delta=\{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_{n-1},\ x_n\}$$

によって定まるこの分割を**分割** Δ と呼び，$a=x_0$, x_1, x_2, ……, x_{n-1}, $x_n=b$ を Δ の**分点**と呼ぶことにする．分割 Δ が与えられたとき，各小区間 $[x_{i-1},\ x_i]$ 内に点 ξ_i を任意に1つずつ選んで

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1}) \tag{2}$$

を考える（左下図参照）．更に

$$\delta(\Delta)=\max(x_1-x_0,\ x_2-x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n-x_{n-1})$$

とおく．このとき，もし，ある実数 S が確定して，$\delta(\Delta)$ が十分小さい分割 Δ を取りさえすれば，ξ_i の選び方にかかわらず，(2)の値を限りなく S に近づけることが出来るならば，この値 S こそ曲線(1)と x 軸および2つの直線 $x=a$, $x=b$ によって囲まれる図形Fの“面積”と呼ばれるべきであろう．そこで

“任意の正数 ε に対して，**ε に応じて**正数 δ が存在し，$\delta(\Delta)<\delta$ である限り，分割 Δ，点 ξ_i の取り方のいかんにかかわらず

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-S\right|<\varepsilon\text{”}$$

となるような実数 S が確定するならば，S を図形Fの**面積**と呼ぶことにする．

ここで，実数を要素とする集合の**有界性**という性質を定義する：

［定義1］　実数を要素とする集合R($\neq\phi$)と，1つの実数 μ とに対して

μ がRの**上界** $\Longleftrightarrow$ 任意の r ($\in$R) に対して $r\leqq\mu$

μ がRの**下界** $\Longleftrightarrow$ 任意の r ($\in$R) に対して $\mu\leqq r$

Rが**上に有界** $\Longleftrightarrow$ Rの上界が存在する

Rが**下に有界** $\Longleftrightarrow$ Rの下界が存在する

Rが**有界** $\Longleftrightarrow$ Rが上にも下にも有界である　■

今，$f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で定義された実数値関

数であり，更に，集合 $\{f(x)|x\in[a,\ b]\}$ が有界であるとき（必ずしも $f(x)$ が $[a,\ b]$ で連続であったり，$f(x)\geqq 0$ $(a\leqq x\leqq b)$ であったりしなくてもよい），前述のような実数 S が確定するならば，$f(x)$ は $[a,\ b]$ において（**Riemann**）**積分可能**であるといい，この S のことを $[a,\ b]$ における $f(x)$ の**定積分**と呼んで

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

という記号で表す．

このように，**大学での微積分においては，定積分は微分演算とは全く独立に定義される**．このことは高校での微積分と大学での微積分との大きな相異点の１つである．（Riemann）積分可能性に関しては，次の定理が基本的である：

定理１．閉区間で連続な実数値関数は，その閉区間において（Riemann）積分可能である． ▩

§2．微分積分法の基本公式

関数 $f(x)$ が与えられたとき，$F'(x)=f(x)$ を満たす $F(x)$ のことを $f(x)$ の**原始関数**と呼ぶことは高校数学で学ぶ．

実数値関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で，その１つの原始関数 $F(x)$ が知られているときは，$F(x)$ を用いて $f(x)$ の積分が計算される．精密にいうと

$$\int_a^x f(t)\,dt=F(x)-F(a)\quad(a\leqq x\leqq b)\tag{3}$$

が成り立つ．**このことは決して当り前のことではない**．高校数学では (3) が定積分の定義であった．しかし，大学での微積分においては，$f(x)$ の定積分は $f(x)$ の原始関数などとは全く独立に定義される．このように大学の微分積分学においては，“定積分”は“原始関数”とは全く独立に確立された概念であるが，両者は等式 (3) によって結びつけられてしまう．**このことは当り前どころか，むしろ不思議なことである．このように，“数学の世界”は“神秘な世界”である．**

大学の微分積分学においては，(3) は定義ではなくて定理である．(3) は**微分積分法の基本公式**と呼ばれている．

§3．複素関数の微分可能性

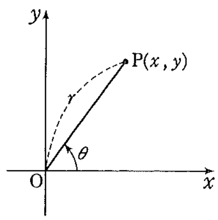
高校数学で扱う関数は，変数も関数値も共に実数であり，しかも変数の個数が１個であるようなものである．このような関数は**実１変数実数値関数**と呼ばれる．ここでは，**複素１変数複素数値関数**（今後，単に**複素関数**と呼ぶ）の微分可能性について論じてみる．

複素関数 $w=f(z)$ は，$z=x+yi$，$w=u+vi$ (x，y，u，v は実数) とおくと２つの実変数 x，y の２つの実数値関数 $u(x,\ y)$，$v(x,\ y)$ の組と同じであるから，特に複素数を用いるには及ばないが，複素関数としての微分可能性を定義すると，微分可能な複素関数の理論（単に**関数論**とも呼ばれる）は非常に実り多いものとなってくる．

本稿では，参考文献 [1] の構想（[1] の第５章の前文参照）に全面的に傾倒して，以下において，連載で関数論の初歩の部分の精神をお伝えしていきたいと思う．

さて，複素関数の微分可能性の定義は形式上実１変数の場合と全く同様であるが，その定義を行う前に，まず**複素平面**と呼ばれるものを説明しておかねばならない．

複素数 $z=x+yi$ (x，y は実数) に座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が１対１対応するから，複素数 z を点 z とも呼ぶ．このように複素数を表すために用いる平面を**複素平面**という．特に実数は x 軸上の点で表され，また純虚数は y 軸上の点で表されるから，x 軸を**実軸**，y 軸を**虚軸**という．



上の図において

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad r=\sqrt{x^2+y^2}$$

であり

$$z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

が成り立つ．この $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を z の**極表示**という．r を z の**絶対値**，θ を z の**偏角**といい，z の絶対値を $|z|$，偏角を $\arg z$ でそれぞれ表す．

［定義２］ 複素関数 $f(z)$ は複素平面 C 上の点 z_0 の **ε-開近傍**，つまり集合 $\{z|z\in\mathrm{C}$ かつ $|z-z_0|<\varepsilon\}$（ε は正数）で定義されているとする．このとき

$f(z)$ が $z=z_0$ で**微分可能**である

$$\Longleftrightarrow\ \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0)\ \text{が存在する}$$

と定義する． ▩

この微分可能性の定義は，形式上，実1変数の場合と同様であるけれども，複素変数の場合は

$$\Delta z \longrightarrow 0$$

というのは

$$|\Delta z| \longrightarrow 0$$

のことであって，Δz がどの方向からどのような経路で0に近づくとしても，それには無関係に

$$\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

が一定の極限値 $f'(z_0)$ に近づくことを意味する．

§4．複素平面上の点集合とその位相的性質

複素平面C上の点 z_0 と正数 ε とに対して，集合

$$\mathrm{U}(z_0,\ \varepsilon)=\{z|z\in\mathrm{C}\ \text{かつ}\ |z-z_0|<\varepsilon\}$$

のことを点 z_0 の **ε-開近傍**と呼んだ．この集合は，また，点 z_0 を中心とする半径 ε の**開円板**とも呼ばれる．

Cの部分集合のことを**複素平面上の点集合**と呼ぶ．C上の点集合Eが，C上の一定の開円板（すなわち，C上の定点を中心とする一定の半径の開円板）の部分集合となるならば，Eは**有界**であるといわれる．

C上の点集合の**位相的性質**と呼ばれるものを以下において定義する：

［定義3］ EをC上の点集合，z_0 をC上の点とするとき，

z_0 がEの**内点**である $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{U}(z_0,\ \varepsilon)\subseteqq\mathrm{E}$ を満たす正数 ε が存在する

z_0 がEの**外点**である $\Longleftrightarrow$ z_0 がEの補集合の内点である

z_0 がEの**境界点**である $\Longleftrightarrow$ z_0 がEの内点でも外点でもない

Eの境界点全体の集合をEの**境界**という．また，Eの境界とEとの和集合をEの**閉包**と呼び，［E］という記号で表す．そして，［E］＝Eを満たすEのことを**閉集合**といい，

“$z_0\in\mathrm{E}\Longrightarrow$［$z_0$ はEの内点である］”

を満たすEのことを**開集合**という

と定義する． ▩

Eが開集合

$\Longleftrightarrow$ “$z\in\mathrm{E}\Longrightarrow$［$\mathrm{U}(z,\ \varepsilon)\subseteqq\mathrm{E}$ なる正数 ε が存在］”

であるから，空集合 ϕ と全複素平面Cとはどちらも開集合である．なぜならば，ϕ が開集合であるのは $z\in\phi$ が偽であるからであり，また，Cが開集合であるのは，どんな点 $z\in\mathrm{C}$ とどんな正数 ε に対しても $\mathrm{U}(z,\ \varepsilon)\subseteqq\mathrm{C}$ が必ず成り立つからである．

ϕ とCとは実は閉集合でもある．なぜならば，ϕ の境界点もCの境界点もどちらも存在し得ないから $[\phi]=\phi$ かつ［C］＝Cが成り立つからである．このように，ϕ やCは開集合であり，かつ同時に閉集合でもあるので，

“Eが開集合であるならばEは閉集合ではない”

などという間違った思い込みをされないように初めて学ぶ人には特に注意していただきたい．実は，筆者もかつては，このような間違った思い込みをしてしまった初学者であったので，自分の経験を生かして特に注意を促したいと思う．

§5．複素関数の連続性と積分

この節では，まず複素関数の連続性を定義する：

［定義4］ EをC上の空でない点集合とし，$w=f(z)$ をEで定義された複素関数とするとき

$f(z)$ が**Eにおいて連続**である

$\Longleftrightarrow$ Eに属する任意の点 z_0 と任意の正数 ε に対して十分小さな正数 δ を **z_0 と ε の両方に応じて**取れば，“$|z-z_0|<\delta$ かつ $z\in\mathrm{E}$”を満たすような任意の点 z に対して，$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ が成り立つ

と定義する． ▩

さて，次はいよいよ複素関数の“積分”を定義することにするが，そのためには，C上の“曲線”をきちんと定義しておかなければならない．

閉区間 $a\leqq t\leqq b$ で連続な2つの実数値関数 $\varphi(t)$, $\psi(t)$ に対して，t を時刻とみなし，時刻 t におけるC上の動点 z を

$$z=\varphi(t)+i\psi(t) \tag{4}$$

とすれば，C上に動点 z の軌跡として1つの曲線 C が描かれるであろう．今，関数 (4) を

$$z=C(t) \tag{5}$$

と表すことにすると，$C(t)$ は**閉区間 $a\leqq t\leqq b$ で連続な複素数値関数**（これは厳密には定義していないが，どんなものであるかは容易に想像がつくであろう！）であるが，この連続関数 $C(t)$ のことを**複素平面上の曲線**と呼ぶことにする．

点 $C(a)$ を曲線(5)の**始点**，点 $C(b)$ を**終点**と呼ぶ．始点と終点が一致する曲線を**閉曲線**と呼ぶ．

$$a<t_1<t_2<b$$
$$\Longrightarrow C(t_1) \neq C(t_2) \text{ かつ } C(a) \neq C(t_1) \text{ かつ } C(t_1) \neq C(b)$$

を満たすような（いい換えれば，自分自身とは交わらないような）曲線(5)のことを **Jordan 曲線**または**単純曲線**と呼ぶ．

さて，(5)により，$C(t)=\varphi(t)+i\psi(t)$ であるが，$\varphi(t)$，$\psi(t)$ がともに閉区間 $a \leqq t \leqq b$ において C^1 **級**（すなわち，微分可能で導関数が連続）であって，しかも $a \leqq t \leqq b$ で常に $\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2 \neq 0$ であるとき，いい換えれば，$a \leqq t \leqq b$ の各点 t で $\varphi'(t)$ か $\psi'(t)$ の少なくとも一方が 0 でないとき，曲線(5)は**滑らか**であるといわれる．ついでながら $\varphi(t)$，$\psi(t)$ が，ともに閉区間 $a \leqq t \leqq b$ において C^1 級であるときは

$$C'(t)=\varphi'(t)+i\psi'(t) \quad (a \leqq t \leqq b)$$

と表し，複素数値関数 $C(t)$ も閉区間 $a \leqq t \leqq b$ において C^1 **級**であるという．

複素平面上の滑らかな曲線 $C(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ とは，閉区間 $a \leqq t \leqq b$ において C^1 級であって，しかも $a \leqq t \leqq b$ で常に $C'(t) \neq 0$ であるような複素数値関数 $C(t)$ のことであるが，今，$\mathbf{C}$ 上の点集合

$$\{C(t) \mid a \leqq t \leqq b\}$$

を C で表すことにし，C において連続な複素関数

$$f(z)=f(x+yi)=u(x, y)+iv(x, y)$$

に対して，定積分

$$\int_a^b f(C(t))C'(t)\,dt$$
$$=\int_a^b \{u(\varphi, \psi)+iv(\varphi, \psi)\}\{\varphi'(t)+i\psi'(t)\}\,dt$$
$$=\int_a^b \{u(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) - v(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\}\,dt$$
$$+i\int_a^b \{u(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) + v(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)\}\,dt$$

のことを

“滑らかな曲線 C に沿っての $f(z)$ の**複素積分**”

と呼んで

$$\int_C f(z)\,dz$$

という記号で表す．このように，今後 C と $C(t)$ はしばしば同一視される．

次に，2 つの曲線 $C_1(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$，$C_2(s)$ $(c \leqq s \leqq d)$ に対して，$C_1(b)=C_2(c)$ ならば，

$$C(t)=\begin{cases} C_1(t) & (a \leqq t \leqq b) \\ C_2(t-b+c) & (b \leqq t \leqq b+d-c) \end{cases}$$

によって，曲線 $C(t)$ $(a \leqq t \leqq b+d-c)$ が作られる．この曲線 C を

$$C_1+C_2$$

と表し，C_1，C_2 の**結合**と呼ぶ．

有限個の滑らかな曲線 C_1，C_2，……，C_n の結合として得られる曲線 $C=C_1+C_2+\cdots\cdots+C_n$（これを**区分的に滑らかな曲線**と呼ぶ）において連続な複素関数 $f(z)$ に対して，C に沿っての $f(z)$ の**複素積分** $\int_C f(z)\,dz$ を

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{C_1} f(z)\,dz+\int_{C_2} f(z)\,dz +\cdots\cdots+\int_{C_n} f(z)\,dz$$

によって定義する．

§6. 一様収束性

この節では，**複素関数列**および**複素関数項級数**の**一様収束性**というものについて論じる．そのためにまず**複素数列**の**収束**に関する議論を行う：

[定義 5] 複素数列 $\{z_n\}$ と 1 つの複素数 z_0 とに対して

z_0 が $\{z_n\}$ の**極限**（$\{z_n\}$ が z_0 に**収束する**）

$\Longleftrightarrow$ どんなに小さな正数 ε に対しても，十分大きな自然数 $N(\varepsilon)$ を **ε に応じて**取れば，$n>N(\varepsilon)$ を満たす任意の自然数 n に対して $|z_n-z_0|<\varepsilon$ となる

と定義する． ▩

複素数列 $\{z_n\}$ がある 1 つの複素数 z_0 に収束するとき，$\{z_n\}$ **は収束する**という．

次に，複素関数の列 $\{f_n(z)\}$ の各項 $f_n(z)$ がすべて（複素平面 $\mathbf{C}$ 上の）点集合 $\mathbf{E}$ で定義された関数であるとき，$\{f_n(z)\}$ を **$\mathbf{E}$ で定義された複素関数列**と呼ぶ．

$\{f_n(z)\}$ を点集合 $\mathbf{E}$ で定義された複素関数列とするとき，$\mathbf{E}$ に属する各点 z に対して，複素数列 $\{f_n(z)\}$ が収束するならば，関数

$$f(z)=\lim_{n\to\infty} f_n(z) \qquad (z \in \mathbf{E})$$

のことを，関数列 $\{f_n(z)\}$ の $\mathbf{E}$ における**極限関数**と

呼ぶ.

[定義 6] $\{f_n(z)\}$ を点集合Eで定義された複素関数列とし，そのEにおける極限関数を $f(z)$ とするとき

関数列 $\{f_n(z)\}$ がEで**一様収束**する

$\Longleftrightarrow$ どんなに小さな正数 ε に対しても，十分大きな自然数 $N(\varepsilon)$ を **ε に応じて取れば**，Eに属する**任意の**点 z に対して

$n>N(\varepsilon) \Longrightarrow |f_n(z)-f(z)|<\varepsilon$ が成り立つ

と定義する. ■

関数列が一様収束するかしないかの判定には，次の定理が用いられる：

定理 2．(一様収束に関する Cauchy の判定法)

点集合Eで定義された複素関数列 $\{f_n(z)\}$ がEで一様収束する.

$\Longleftrightarrow$ どんなに小さな正数 ε に対しても，十分大きな自然数 $N(\varepsilon)$ を **ε に応じて取れば**，Eに属する**任意の**点 z に対して

"$n>N(\varepsilon)$ かつ $m>N(\varepsilon)$"

$\Longrightarrow |f_n(z)-f_m(z)|<\varepsilon$ ■

[定義 7] 点集合Eで定義された複素関数項級数 $\sum f_n(z)$ に対して，その部分和のなす関数列がEで一様収束するならば，関数項級数 $\sum f_n(z)$ はEで**一様収束**するという．更に，複素関数項級数 $\sum|f_n(z)|$ がEで一様収束するならば，$\sum f_n(z)$ はEで**一様に絶対収束**をするという. ■

$|f_{m+1}(z)+\cdots\cdots+f_n(z)|\leqq|f_{m+1}(z)|+\cdots\cdots+|f_n(z)|$

であるから，定理2により

$\sum f_n(z)$ がEで一様に絶対収束をすれば，Eで一様収束する. $\cdots\cdots$ (＊)

次の定理は，関数項級数が一様に絶対収束をするための十分条件を与えるものである：

定理 3．(Weierstrass の M-判定法)

$\sum f_n(z)$ を点集合Eで定義された複素関数項級数，$\sum M_n$ を非負項級数（すなわち，各 M_n は0以上の実数）とするとき

(i) ある自然数 N が存在し，Eの各点 z に対して

$$n\geqq N \Longrightarrow |f_n(z)|\leqq M_n$$

かつ

(ii) $\sum M_n$ が収束する

$\Longrightarrow$ $\sum f_n(z)$ はEで一様に絶対収束をする. ■

本節の最後に一様収束性に関する重要な定理をまとめて挙げよう：

定理 4．(一様収束による連続性の保存)

点集合Eにおいて連続な複素関数ばかりから成る関数列 $\{f_n(z)\}$ がEで一様収束するならば，そのEにおける極限関数もEにおいて連続である. ■

系 1． $f_n(z)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が点集合Eにおいて連続で，関数項級数 $\sum f_n(z)$ がEで一様収束するならば，そのEにおける和 $\sum f_n(z)$ もEにおいて連続である. ■

この系は定理4．から直ちに成り立つ.

定理 5．$\left(\text{一様収束による} \int_C \text{と} \lim\limits_{n\to\infty} \text{との可換性}\right)$

複素関数 $f_n(z)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が，区分的に滑らかな曲線 C において連続で，関数列 $\{f_n(z)\}$ が C で一様収束するならば，その C における極限関数

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

に対して

$$\int_C \{\lim_{n\to\infty} f_n(z)\}\,dz=\lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,dz \tag{6}$$

が成り立つ. ■

[注意] (6)の左辺が意味をもつこと（定義されること）は定理4によって保証されている.

この定理5．から直ちに次の系が成り立つ：

系 2．(項別積分可能性)

複素関数 $f_n(z)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が，区分的に滑らかな曲線 C において連続で，関数項級数 $\sum f_n(z)$ が C で一様収束するならば，その C における和

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

に対して

$$\int_C \left\{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right\} dz=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C f_n(z)\,dz \tag{7}$$

が成り立つ. ■

[注意] (7)の右辺は複素級数の和を表している.

§7. 複素級数の絶対収束性

[定義 8] 複素級数 $\sum z_n$ が**絶対収束**をする

$\Longleftrightarrow$ $\sum|z_n|$ が収束する

と定義する. ■

前節で，点集合 E で定義された複素関数項級数 $\sum f_n(z)$ が E で一様に**絶対収束をすれば，** E で一様**収束する**ことを一様収束に関する Cauchy の判定法により導いたが

定理 6．（複素数列に関する Cauchy の判定法）
複素数列 $\{z_n\}$ に対して，
$\{z_n\}$ が収束する
$\Longleftrightarrow$ どんなに小さな正数 ε に対しても，十分大きな自然数 $N(\varepsilon)$ を **ε に応じて**取れば
"$n>N(\varepsilon)$ かつ $m>N(\varepsilon)$" $\Longrightarrow |z_n-z_m|<\varepsilon$
が成り立つ． ▩

によれば，

定理 7． 絶対収束をする複素級数は収束する． ▩
が成り立つ．

次の定理は，複素級数が絶対収束をするための十分条件を与えるものであり，前節に紹介した Weierstrass の M-判定法に類似のものである：

定理 8． $\sum z_n$ を複素級数，$\sum M_n$ を非負項級数（すなわち，各 M_n は 0 以上の実数）とするとき，
(i) ある自然数Nが存在して
$$n \geqq N \Longrightarrow |z_n| \leqq M_n$$
かつ
(ii) $\sum M_n$ が収束する
$\Longrightarrow \sum z_n$ は絶対収束をする ▩

複素級数 $\sum z_n$ に対して，自然数全体の集合 N から N の上への 1 対 1 の写像 γ を用いて $\sum z_{\gamma(n)}$ と表される級数のことを，$\sum z_n$ からその**項の順序を変更して得られる級数**と呼ぶ．
このことについては，次の定理が成り立つ：

定理 9． 複素級数 $\sum z_n$ が絶対収束をしているときには，その和 $\sum z_n$ はその項の順序を変更しても変わらない． ▩

$$\begin{array}{cccccc}
z_1 & z_3 & z_6 & z_{10} & z_{15} & \cdots\cdots \\
z_2 & z_5 & z_9 & z_{14} & z_{20} & \cdots\cdots \\
z_4 & z_8 & z_{13} & z_{19} & z_{26} & \cdots\cdots \\
z_7 & z_{12} & z_{18} & z_{25} & z_{33} & \cdots\cdots \\
z_{11} & z_{17} & z_{24} & z_{32} & z_{41} & \cdots\cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

複素級数 $\{z_n\}$ は，例えば，無限個の部分級数
$$\sum_{m=1}^{\infty} z_{\frac{(1-1)\cdot 1+2}{2}+1\cdot(m-1)+\frac{m(m-1)}{2}},$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} z_{\frac{(2-1)\cdot 2+2}{2}+2\cdot(m-1)+\frac{m(m-1)}{2}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad ,$$
$$\sum_{m=1}^{\infty} z_{\frac{(n-1)\cdot n+2}{2}+n(m-1)+\frac{m(m-1)}{2}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
に分割される（左下の図式参照）．このような級数の分割に関して，次の定理が成り立つ：

定理 10． 複素級数 $\sum z_n$ を高々可算無限個の部分級数に分割するとき，$\sum z_n$ が絶対収束をするならば，部分級数達も絶対収束をする．部分級数達の和を
$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \cdots\cdots$$
とすれば，級数 $\sum \sigma_\nu$ も絶対収束をし，和として
$$\sum \sigma_\nu = \sum z_n \text{（定理 9 参照）}$$
が成り立つ． ▩

2 つの複素級数が絶対収束をしているとき，それらの和の積に関して，次の定理が成り立つ：

定理 11． 複素級数 $\sum z_n$，$\sum z'_n$ が絶対収束をして
$$\sum z_n = s,\quad \sum z'_n = s'$$
であるならば，級数
$$z_1z'_1+z_1z'_2+z_2z'_1+z_1z'_3+z_2z'_2+z_3z'_1+\cdots\cdots$$
も絶対収束をして，その和は ss' である．よって，
級数 $\sum(z_1z'_n+z_2z'_{n-1}+\cdots\cdots+z_{n-1}z'_2+z_nz'_1)$
も収束し，和は ss' である． ▩

（以下次号につづく）

※ 編集部注：この文章は，宮川先生が高校生に大学で学ぶ数学を紹介する形で書かれたものです．

＜参　考　文　献＞

[1] 高木貞治 著　解析概論　岩波書店
[2] 小平邦彦 著　解析入門　岩波書店
[3] 能代　清 著　函数論概説 I，II　岩波書店
[4] 能代　清 著　初等函数論　培風館
[5] 一松　信 著　函数論入門　培風館
[6] L. V. Ahlfors 著
Complex Analysis　McGraw Hill 書店
[7] 田村二郎 著　解析関数　裳華房

（静岡県立伊東高等学校）