Reflectionを用いた1次変換の授業展開

小澤　猛（おざわ　たけし）

1次変換のうち，回転や折り返しを表すものは，基本的であって応用の範囲が広い．しかし，その割には生徒に忘れられがちである．そこで，原点のまわりの θ 回転を表す行列を $R(\theta)$，原点を通り方向角 α の直線に関する折り返しを表す行列を $Ref(\alpha)$ として，授業を展開してみた．

$Ref(\alpha)$ は，少し長くてキザな記号かもしれないが逆に，そのキザなことを知識の定着の材料にした．$R(\theta)$ と $Ref(\alpha)$ は対応する行列が似て非なることを記号の上でも対応させてみた．

行列 $Ref(\alpha)$ を求めるにはより基本的な1次変換の合成変換を用いたが，その理解の助けを簡単な図に求めてみた．この図の意味が理解できたか否かでのちに行ったテストの成績が大きく左右した．

[1]　x 軸に関する折り返し変換

x 軸に関する折り返し変換 f を表す行列 F は

$$f:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = \ \ x \ = 1\cdot x + 0\cdot y \\ y' = -y = 0\cdot x + (-1)\cdot y \end{cases}$$

より　$F=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$　である．

[2]　原点のまわりの角 θ の回転変換

原点のまわりの角 θ の回転変換を $r(\theta)$ とし，変換 $r(\theta)$ を表す行列を $R(\theta)$ とする（*Rotation* 回転）．

基本ベクトル $\overrightarrow{e_1}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{e_2}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が変換 $r(\theta)$ により，それぞれ $\overrightarrow{e_1}'$，$\overrightarrow{e_2}'$ に変換されるとすると

$$\overrightarrow{e_1} \xrightarrow{r(\theta)} \overrightarrow{e_1}',\quad \overrightarrow{e_2} \xrightarrow{r(\theta)} \overrightarrow{e_2}'$$

$$\overrightarrow{e_1}'=\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{e_2}'=\begin{pmatrix} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

が成り立つ．また

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad r(\theta)\quad} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

とすれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x\overrightarrow{e_1}+y\overrightarrow{e_2}$$

と同様の関係

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=x\overrightarrow{e_1}'+y\overrightarrow{e_2}'$$

が成り立つから

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

よって

$$R(\theta)=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

[3]　原点を通る直線に関する折り返し変換

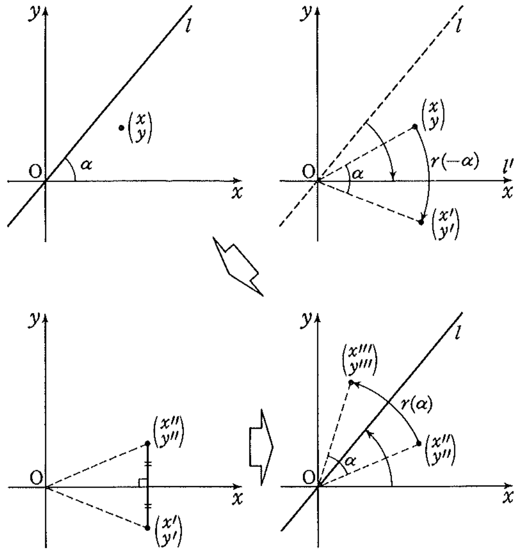
原点を通り x 軸の正の方向となす角（方向角）が α の直線 l の方程式は l：$y=x\tan\alpha$ である．

ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の終点の l に関する対称点を求めてみよう．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{r(-\alpha)} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \xrightarrow{\ f\ } \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \xrightarrow{r(\alpha)} \begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix}$$

とするとき，ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の終点の l に関する

対称点は，ベクトル $\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix}$ の終点である．これは次の図でも理解されるであろう．



したがって

$$\begin{pmatrix} x''' \\ y''' \end{pmatrix}=R(\alpha)\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}=R(\alpha)\cdot F\cdot\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$=R(\alpha)\cdot F\cdot R(-\alpha)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

l に関する折り返し変換を $ref(\alpha)$ で表し（*reflection* 反射，折り返し），$ref(\alpha)$ を表す行列を $Ref(\alpha)$ とする．

$$Ref(\alpha)$$

$$=R(\alpha)\cdot F\cdot R(-\alpha)$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos^2\alpha-\sin^2\alpha & 2\sin\alpha\cos\alpha \\ 2\sin\alpha\cos\alpha & -(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$$

[4] **例題 1** 点 $(2,\ 4)$ の直線 $l：y=\sqrt{3}\,x$ に関する対称点の座標を求めよ．

〔解〕 直線 l の方向角は $\dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$Ref\left(\frac{\pi}{3}\right)=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{3} & \sin\dfrac{2\pi}{3} \\ \sin\dfrac{2\pi}{3} & -\cos\dfrac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ref\left(\frac{\pi}{3}\right)\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1+2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+2 \end{pmatrix}$$

〔答〕 $(2\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+2)$

[5] **例題 2** 原点Oからの距離を変えない 1 次変換 f は，$r(\theta)$ または $ref(\theta)$ であることを証明せよ．

〔証明〕 $f：\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ とし，1 次変換 f を表す行列を $L=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

$$x'^2+y'^2=x^2+y^2$$

から $(ax+by)^2+(cx+dy)^2=x^2+y^2$

これは恒等式であるから $a^2+c^2=1$ …… ①，$ab+cd=0$ …… ②，$b^2+d^2=1$ …… ③

①，③ をみたす $a,\ b,\ c,\ d$ はそれぞれ

$$\begin{cases} a=\cos\theta \\ c=\sin\theta \end{cases}\qquad\begin{cases} b=\cos\theta' \\ d=\sin\theta' \end{cases}$$

$$(-\pi\leqq\theta<\pi,\ -\pi\leqq\theta'<\pi)$$

とおける．これを ② に代入すると

$$ab+cd=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'$$

$$=\cos(\theta-\theta')=0$$

ゆえに $\theta'-\theta=\pm\dfrac{\pi}{2}$，$\theta'=\theta\pm\dfrac{\pi}{2}$

$$\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)=\mp\sin\theta,\quad \sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)=\pm\cos\theta$$

よって $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}=R(\theta)$，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}=Ref\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

となって証明された．

◈ 最後に，これらの指導を終えた後に行った実際のテスト問題（第 2 学期中間考査，平成元年 10 月 25 日実施）を挙げておく．なお，紙面の関係で，体裁等は実際とは多少異なっている箇所もある．

〔1〕 次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) 座標平面上の点を原点のまわりに θ 回転する変換 $r(\theta)$ を表す行列 $R(\theta)$ を書け．

$$\boldsymbol{R(\theta)}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$ 答

(2) $R(60°)$ を求めよ．

$$\boldsymbol{R(60°)}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$ 答

(3) 点 (2, 4) を原点のまわりに 60° 回転するとどんな点に移るか．

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1-2\sqrt{3}\\ \sqrt{3}+2\end{pmatrix}$$ 答 **点 $(1-2\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3})$**

(4) $R(10°)\times R(20°)\times R(30°)$ を求めよ．

$$R(10°)\times R(20°)\times R(30°)=R(10°+20°+30°)$$
$$=R(60°)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$$ 答

〔2〕 次の (1)〜(4) に答えよ．

(1) 座標平面上の点の直線 $y=x\tan\alpha$ に関する対称変換 $ref(\alpha)$ を表す行列 $Ref(\alpha)$ を書け．

$$\boldsymbol{Ref(\alpha)}=\begin{pmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{pmatrix}$$ 答

(2) $Ref(30°)$ を求めよ．

$$Ref(30°)=\begin{pmatrix}\cos 60° & \sin 60°\\ \sin 60° & -\cos 60°\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}$$ 答

(3) 点 (4, −2) を直線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ に関して対称変換するとどんな点に移るか．

$$Ref(30°)\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3}+1\end{pmatrix}$$

答 **点 $(2-\sqrt{3},\ 1+2\sqrt{3})$**

(4) $Ref(10°)\times Ref(20°)$ はどんな1次変換を表すか．

$$Ref(10°)\times Ref(20°)$$
$$=\begin{pmatrix}\cos 20° & \sin 20°\\ \sin 20° & -\cos 20°\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 40° & \sin 40°\\ \sin 40° & -\cos 40°\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos 20°\cos 40°+\sin 20°\sin 40° & \cos 20°\sin 40°-\sin 20°\cos 40°\\ \sin 20°\cos 40°-\cos 20°\sin 40° & \sin 20°\sin 40°+\cos 20°\cos 40°\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\cos(20°-40°) & -\sin(20°-40°)\\ \sin(20°-40°) & \cos(20°-40°)\end{pmatrix}=\boldsymbol{R(-20°)}$$ 答

〔3〕 行列 $\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ の表す1次変換によって次の図形はどのような図形に移されるか．

(1) 座標平面

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ の像を $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ とする．

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x-2y\\ 2x+4y\end{pmatrix}$$

$\therefore\ y'=-2x'$ 　　答 **直線 $y=-2x$**

(2) 直線 $x+2y=4$

この直線上の2点 (4, 0), (0, 2) を変換する．

$$\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}$$

異なる2点が同一の点に移るから

1点 (−4, 8) に移る． 答

(3) 直線 $y=x$

この直線上の任意の点 $(t,\ t)$ について

$$\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3t\\6t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3t\\-2(-3t)\end{pmatrix}$$ となる．

点 $(-3t,\ -2(-3t))$ は常に直線 $y=-2x$ にあり，この点はこの直線全体を動く． 答 **直線 $y=-2x$**

〔4〕 次の各問いに答えよ．

(1) 行列 $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}$ について

1) A はどのような1次変換を表すか．

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos 60° & -\sin 60°\\ \sin 60° & \cos 60°\end{pmatrix}=\boldsymbol{R(60°)}$$ 答

2) A^6 はどのような1次変換を表すか．

$$A^6=\{R(60°)\}^6=R(60°\times 6)=R(360°)=R(0°)$$

答 **恒等変換**

(2) 行列 $B=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}$ について

1) B はどのような1次変換を表すか．

$$B=2\,Ref(15°)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}Ref(15°)$$

折り返し変換 $ref(15°)$ と相似比2の相似変換との合成変換を表す． 答

2) B^5 が表す1次変換による点 (2, 1) の像を求めよ．

$$B^5\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\{2\,Ref(15°)\}^5\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2^5\,Ref(15°)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$
$$=2^4\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1\\ 1 & -\sqrt{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2^4\begin{pmatrix}2\sqrt{3}+1\\ 2-\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

答 **点 $(16+32\sqrt{3},\ 32-16\sqrt{3})$**