2次3項式が“たすき掛け”で因数分解可能なのは？

塩見　浩三

以前にアメリカの数学の高校生用の教科書を9冊購入して内容を調べたことがある．

因数分解の問題文の，Factor the following polynomials **if possible**. という言葉の if possible という単語が記憶に残っている．

日本の数学の問題は必ず解ける問題しか教科書にはないからである．ある面ではおもしろくない点でもある．

たとえば

$3x^2+x-14=0$　……①

$6x^2-3x-4=0$　……②

を解く場合，①は簡単に因数分解できるが，②は整係数では因数分解できないのである．

因数分解を用いて解くか？　解の公式を用いて解くか？

整係数で因数分解できない問題を一生懸命“たすき掛け”によって因数分解しようとしている生徒，逆に“たすき掛け”で因数分解できる問題を，解の公式を用いて解いている生徒をよく見かける．

後者はめんどうでも正解にたどりつけるからいいようなものではある．

ではどんな問題ならば整係数で因数分解でき，どんな問題なら整係数で因数分解できないのだろうか．

この疑問は大学で附属中学に教生にいった時に起こったものである．

数研の数Ⅰの教科書では

2次方程式の解法

$ax^2+bx+c=0$ の形に整理する

1　因数分解の利用を考えてみる

2　解の公式を用いる

数研の指導書には

> 2次方程式の解法として，2次方程式を解くには，まず因数分解を試み，無理なら解の公式を使う．解の公式は計算ミスをしやすいので因数分解を主に使うように指導するのもよい．

と記述しているが，どういうときが因数分解で，どういうときが解の公式か記述していない．

他の教科書，参考書も同じである．

まだ誰も知らないことなのかも知れない？

25年くらい前に，整係数で因数分解できる問題と，そうでない問題を具体的に多数あれこれと調べているうちに，基本形に直していて，次の定理を発見した．そして“塩見の定理”と呼ぶことにして，ひとり楽しんでいる．

塩見の定理

2次方程式が整係数で（たすき掛けで）因数分解できる必要十分条件は判別式 $D=b^2-4ac$ が，完全平方数（1，4，9，16，……）である．

多数の具体例で判別式を調べてみれば，生徒でも容易に上の定理を発見することであろう．

しかし証明，特に“逆の証明”となると以後十数年が必要であった．

まず

> 2次方程式が“たすき掛け”で因数分解できるならば ⟶ 2次方程式の判別式は完全平方数である．

証明

$(ax+b)(cx+d)=0$

$acx^2+(ad+bc)x+bd=0$

$D=(ad+bc)^2-4abcd$

$\quad=(ad-bc)^2$

と簡単に証明できる.

逆の証明は

2次方程式の判別式が完全平方数ならば⟶その2次方程式は“たすき掛け”で因数分解できる.

この命題を数式で表現すると

$ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$, a, b, c は整数) において, $D=b^2-4ac=d^2$ (dは整数) が成立するならば, 整数 p_1, p_2, q_1, q_2 が存在して $ax^2+bx+c=(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)$

証明

$\left.\begin{array}{l} b=A+B \\ d=A-B \end{array}\right\}$ とおくと $A=\dfrac{b+d}{2}$, $B=\dfrac{b-d}{2}$

b, d が整数だから A, B は共に整数か, あるいは共に $\dfrac{奇数}{2}$ である.

ところが $D=b^2-4ac=d^2$ から

$$b^2-d^2=4ac$$

$$(A+B)^2-(A-B)^2=4ac$$

$$\therefore \quad AB=ac$$

ゆえに AB は整数であり, A, B 共に $\dfrac{奇数}{2}$ ではあり得ない. すなわち A, B は共に整数である.

また, a は AB の約数である.

A, a の最大公約数を p_2 とし, $a=p_1p_2$ と表せば, p_1 はBの約数だから $B=p_1q_2$ と表せる.

また $A=p_2q_1$ と表すことにする.

(p_1, p_2, q_1, q_2 は整数とする)

$b=A+B$, $c=\dfrac{AB}{a}$ ($a\neq 0$) から

$$ax^2+bx+c=ax^2+(A+B)x+\frac{AB}{a}$$

$$=a\left(x^2+\frac{A+B}{a}x+\frac{AB}{a^2}\right)$$

$$=a\left(x+\frac{A}{a}\right)\left(x+\frac{B}{a}\right)$$

$a=p_1p_2$, $A=p_2q_1$, $B=p_1q_2$ から

$$(与式)=p_1p_2\left(x+\frac{p_2q_1}{p_1p_2}\right)\left(x+\frac{p_1q_2}{p_1p_2}\right)$$

$$=(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)$$

なお, この証明は昭和45年に今治明徳高校の村上通典先生が完成されたものである.

以上のことから, 2次方程式の解法においては, **まず判別式を調べ**, 完全平方数ならば⟶整係数で因数分解できるので“たすき掛け”で因数分解する.

もし完全平方数でないならば⟶解の公式で解く というのがいちばん科学的で, if possible の判断がついたことになる.

なお判別式が完全平方数でない場合も, この判別式の値は解の公式に必要な値なのである.

したがって最初に“まず判別式を調べる”ことはひとつも無駄にならないのである.

このことも判別式の興味ある性質といえないだろうか?

この指導をしておけば, 後ででてくる2次式を, 1次式の積に変形することや, x, y の2次方程式が2直線を表すときの判別式が“完全平方式”でなければならないということと類似しており, 生徒の興味と理解を深めることができます.

しかし逆の証明は高校生には無理だと思いますが, 先日大学院にいった生徒から, この逆の証明を教えてほしいという便りをもらって, この解答を送ったこともあります.

数“楽”の話題のひとつにしていただければと思っています. if possible.

(愛媛県立西条高等学校)