円の面積について

大木　実（おおき　みのる）

三角関数を微分する際の公式は角θを弧度法で表し，まず

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

の証明から始めます．

この証明には，半径rの円の面積πr^2を用いて，扇形とその内接三角形，外接三角形の面積の大小関係から，角度を0に近づける極限操作をします．

ところで円について，(円周)÷(直径)の値として，円周率πを決めたとき，半径rの円の面積Sについて，通常内接正n角形の面積をS_n，外接正n角形の面積をS_n'として

$$S_n<S<S_n',$$

$$S_n=\frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n},\quad S_n'=nr^2\tan\frac{\pi}{n}$$

が成立します．$\dfrac{\pi}{n}=\theta$とおくと

$$S_n=\frac{1}{2}\pi r^2\frac{\sin 2\theta}{\theta},\quad S_n'=\pi r^2\frac{\tan\theta}{\theta}$$

不等式は

$$\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\cos\theta<\frac{S}{\pi r^2}<\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}$$

となります．

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{1}{\cos\theta},$$

$$\frac{S_{2n}'}{S_n'}=1-\tan^2\frac{\theta}{2},$$

$$\frac{S_n'}{S_n}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

ですから，$m=2^kn$ ($k=1,\ 2,\ \cdots\cdots$) として，数列$\{S_m\}$は増加数列，数列$\{S_m'\}$は減少数列で同一極限値をもちます．この極限が正n角形が円になったときの面積で，極限値がπr^2となるには①を前提にしています．ゆえに，この方法での①の証明は循環論法になります．

円の面積を①を用いずに求める方法を考えました．周囲の長さが$2\pi r$の正n角形A_nの中心をOとします．$\dfrac{\pi}{n}=\theta$とおくと，一辺の長さは$2r\theta$，Oから頂点までの距離をl_n，Oから辺までの距離をh_n，面積をS_nとおくと

$$l_n=\frac{r\theta}{\sin\theta},\quad h_n=\frac{r\theta}{\tan\theta},\quad S_n=\pi r^2\frac{\theta}{\tan\theta}$$

面積がS_nの円をC_nとし，その半径をr_nとします．

A_nの内接円は半径がh_nで，外接円は半径がl_nですから，円C_nの中心を点Oにすると円周は正n角形A_nの辺と交わります．

$$h_n<r_n<l_n,\quad \frac{h_n}{l_n}=\cos\theta$$

$$\frac{S_{2n}}{S_n}=\frac{\tan\theta}{2\tan\frac{\theta}{2}}=1+\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos\theta}>1$$

$$\therefore\quad r_n<r_{2n}$$

$$\frac{h_{2n}}{h_n}=\frac{\tan\theta}{2\tan\frac{\theta}{2}}>1,$$

$$\frac{l_{2n}}{l_n}=\frac{\sin\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}=\cos\frac{\theta}{2}<1$$

$m=2^kn$ ($k=1,\ 2,\ \cdots\cdots$) として，数列$\{r_m\}$，$\{h_m\}$は増加数列，$\{l_m\}$は減少数列で

$$h_m<r_m<l_m\ (m=2^kn,\ k=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

$$\lim_{k\to\infty}(l_m-h_m)=\lim_{k\to\infty}l_m\left(1-\frac{h_m}{l_m}\right)$$

$$\leqq\lim_{k\to\infty}l_n\left(1-\cos\frac{\theta}{2^k}\right)=0$$

となり，$k\longrightarrow\infty$で$\{h_m\}$，$\{r_m\}$，$\{l_m\}$は同一極限に収束します．この極限をr_0とします．また，図形A_mは周辺が半径h_mの内接円と半径l_mの外接円とに挟まれた範囲にある凸多角形ですから，円C_mの

極限 C_0 に収束します．しかし，A_m の周は常に $2\pi r$ ですから，円 C_0 の周も $2\pi r$ となります．よって，円 C_0 の半径は r です．

$\therefore\ r_0=r \qquad \therefore\ \lim_{k\to\infty} h_m=\lim_{k\to\infty} l_m=r$

したがって

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{\theta}{2^k}}{\sin\frac{\theta}{2^k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{l_m}{r}=1,$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{\theta}{2^k}}{\tan\frac{\theta}{2^k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{h_m}{r}=1$$

よって①が証明され，同時に

$$\lim_{k\to\infty} S_m=\pi r^2$$

が成立するので，半径 r の円 C_0 の面積は πr^2 となります．なお $\lim_{k\to\infty} l_m=r$ を用いると

$$\frac{r}{l_n}=\frac{l_{2n}}{l_n}\cdot\frac{l_{4n}}{l_{2n}}\cdot\frac{l_{8n}}{l_{4n}}\cdots\cdots\cdot\frac{l_{2^k n}}{l_{2^{k-1} n}}\cdots\cdots$$

したがって

$$\frac{\sin\theta}{\theta}=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{4}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^k}\cdots\cdots$$

が成立します．

（元 成安女子高等学校）