平均値の定理のθの極限

石濱（いしはま）　文武（ふみたけ）

§ はじめに

微分法の平均値の定理

(*)　$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$　　$(0<\theta<1)$

を満たすθの，$h\longrightarrow 0$ としたときの極限値は，

$f''(a)\neq 0$ の場合 $\dfrac{1}{2}$ ですが，一般には後で述べるような定理が成立します．

まず，例を挙げます．解答では，この定理を使わないで直接計算で求めてみます．定理の結果と比較して下さい．

§ 例

[例]　平均値の定理(*)を満たすθについて

$$\lim_{h\to 0}\theta$$

を求めよ．

(1)　$f(x)=px^2+qx+r$　$(p\neq 0)$

（解）　$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=2pa+ph+q$

$f'(a+\theta h)=2p(a+\theta h)+q$

だから

$$\theta=\frac{1}{2}$$

（注）　したがって，2次関数については常に $\theta=\dfrac{1}{2}$

(2)　$f(x)=x^3-2x$，$a>0$

（解）　$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=3a^2+3ah+h^2-2$

$f'(a+\theta h)=3(a+\theta h)^2-2$

だから

$$(a+\theta h)^2=a^2+ah+\frac{h^2}{3}$$

$a>0$，$0<\theta<1$，$h\longrightarrow 0$　だから，$a+\theta h>0$ としてよく

$$a+\theta h=\sqrt{a^2+ah+\frac{h^2}{3}}$$

$$\theta=\frac{\sqrt{a^2+ah+\frac{h^2}{3}}-a}{h}=\frac{a+\frac{h}{3}}{\sqrt{a^2+ah+\frac{h^2}{3}}+a}$$

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$$

（注）　この例は，[定理] の $f''(a)\neq 0$ の場合にあたる．

(3)　$f(x)=x^3-2x$，$a=0$

（解）　$\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=h^2-2$

$f'(\theta h)=3\theta^2h^2-2$

だから

$$\theta^2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

（注）　$f''(a)=0$，$f'''(a)\neq 0$ の場合．

(4)　$f(x)=x^4$，$a=0$

（解）　簡単な計算で，

$$\theta=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

をうる．

（注）　$f''(a)=f'''(a)=0$，$f^{(4)}(a)\neq 0$ の場合．

§ 定理

[定理]　関数 $f(x)$ が，$x=a$ を含む区間で n 回 $(n\geqq 2)$ 微分可能かつ $f^{(n)}(x)$ が連続で $f^{(k)}(a)=0$ $(k=2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$，$f^{(n)}(a)\neq 0$ ならば，

微分法の平均値の定理

(*)　$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)$ $(0<\theta<1)$

を満たすθについて

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$$

である．

(証明) (証明を分かりやすくするために，まず $n=4$ の場合を証明してみます.)

(i) $n=4$ の場合

「関数 $f(x)$ が $x=a$ で4回微分可能かつ $f^{(4)}(x)$ が連続で，$f''(a)=f'''(a)=0$，$f^{(4)}(a)\neq 0$ ならば，(*) を満たす θ について

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

である.」

を示せばよい.

テイラーの定理を $f(x)$ に適用して

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{2}h^2f''(a)$$
$$+\frac{1}{3!}h^3f'''(a)+\frac{1}{4!}h^4f^{(4)}(a+\theta_1 h)$$

仮定により，$f''(a)=f'''(a)=0$ だから，上式より

$$(**)\quad f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{4!}h^4f^{(4)}(a+\theta_1 h)\quad (0<\theta_1<1)$$

をうる.

一方，テイラーの定理を $f'(x)$ に適用して

$$f'(a+\theta h)=f'(a)+\theta hf''(a)+\frac{1}{2}\theta^2h^2f'''(a)$$
$$+\frac{1}{3!}\theta^3h^3f^{(4)}(a+\theta_2\theta h)$$
$$=f'(a)+\frac{1}{3!}\theta^3h^3f^{(4)}(a+\theta_2\theta h)\quad (0<\theta_2<1)$$

これを (*) に代入して

$$(***)\quad f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{3!}\theta^3h^4f^{(4)}(a+\theta_2\theta h)$$

をうる.

(**), (***) を比較して

$$\frac{1}{3!}\theta^3h^4f^{(4)}(a+\theta_2\theta h)=\frac{1}{4!}h^4f^{(4)}(a+\theta_1 h)$$

ここで，$h\longrightarrow 0$ とすれば，$0<\theta,\ \theta_1,\ \theta_2<1$ より，$a+\theta_2\theta h$, $a+\theta_1 h\longrightarrow a$ で，$f^{(4)}(x)$ が連続であることから

$$\lim_{h\to 0}\theta^3\cdot f^{(4)}(a)=\frac{3!}{4!}f^{(4)}(a)$$

仮定より $f^{(4)}(a)\neq 0$ であったから

$$\lim_{h\to 0}\theta^3=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad \lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

(ii) 一般 ($n\geqq 2$) の場合

テイラーの定理を $f(x)$ に適用して，仮定 $f^{(k)}(a)=0$ ($k=2,\ \cdots\cdots,\ n-1$) を使えば

$$(**)\quad f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{n!}h^nf^{(n)}(a+\theta_1 h)\quad (0<\theta_1<1)$$

をうる.

一方，テイラーの定理を $f'(x)$ に適用して，同じ仮定を使えば

$$f'(a+\theta h)=f'(a)+\frac{1}{(n-1)!}\theta^{n-1}h^{n-1}f^{(n)}(a+\theta_2\theta h)\quad (0<\theta_2<1)$$

をうる.

これを (*) に代入して

$$(***)\quad f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{1}{(n-1)!}\theta^{n-1}h^nf^{(n)}(a+\theta_2\theta h)$$

をうる.

(**), (***) を比較して

$$\frac{1}{(n-1)!}\theta^{n-1}h^nf^{(n)}(a+\theta_2\theta h)=\frac{1}{n!}h^nf^{(n)}(a+\theta_1 h)$$

ここで，$h\longrightarrow 0$ とすれば，(i) と同様にして

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$$

をうる.

> [系] $f(x)$ が x の n 次関数 ($n\geqq 2$) であれば，平均値の定理 (*) を満たす θ について $h\longrightarrow 0$ としたときの θ の極限値は
>
> $$\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt[3]{4}},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$$
>
> のいずれかである.

(証明) $f(x)=px^n+\cdots\cdots$ $\quad(p\neq 0)$

とおけば，

$$f^{(n)}(x)=n!\cdot p\neq 0$$

であるから，[定理] より [系] の結果をうる.

[例] [例] (1)〜(4) では，直接計算で θ の極限値を求めましたが，ここでは基本的な関数について，[定理]，[系] を利用して得られる結果を列挙してみましょう.

(5) $f(x)$ が x の3次関数ならば，θ の極限値は $\frac{1}{2}$

または $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であり，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ になるのは［定理］の a について点 $(a,\ f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点であるときに限る．

(6) $f(x)$ が x の 4 次関数ならば，θ の極限値は $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$ のいずれかである．

(7) 分数関数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ について θ の極限値は $\dfrac{1}{2}$ である．

（証） $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}\neq 0$ による．

(8) 無理関数 $f(x)=\sqrt{x}$ $(x>0)$ について θ の極限値は $\dfrac{1}{2}$ である．

（証） $f''(x)=-\dfrac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}\neq 0$ による．

(9) 指数関数 $f(x)=e^x$ について θ の極限値は $\dfrac{1}{2}$ である．

（証） $f''(x)=e^x\neq 0$ による．

(10) 三角関数 $f(x)=\sin x$ について θ の極限値は $\dfrac{1}{2}$ または $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である．

（証） $f''(a)=-\sin a\neq 0$ である a に対しては θ の極限値は $\dfrac{1}{2}$ であり，$f''(a)=0$ である a に対しては $f'''(a)=-\cos a\neq 0$ であるから θ の極限値は $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である．

§ おわりに

平均値の定理の θ の極限値を直接計算で求めようとすると，［例］(2) のように簡単な関数であっても計算は相当複雑になることが多く，また高校の範囲内でできるものは限られたものになります．ところが，［定理］を利用すれば，［例］(5)～(10) のような関数については簡単に θ の極限値が求められます．［定理］の証明ではテイラーの定理が主要な役割をはたしていたわけですから，テイラーの定理の偉力をあらためて知らされます．

最後に，［定理］における n の増加とともに，θ の極限値がどのように変化するかを図形的に調べてみましょう．

$\theta_n=\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{\sqrt[n-1]{n}}$ とおけば，$\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=1$ ですから，数列 $\{\theta_n\}$ は

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}<\frac{1}{\sqrt[3]{4}}<\cdots\cdots<\frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}<\cdots\cdots<1$$

を満たす単調増加列で，1 に収束します．

したがって，3 点を

$$\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{B}(a+h,\ 0),\ \mathrm{C}_n(a+\theta h,\ 0)$$

とおくと，$h\longrightarrow 0$ のとき，n の増加とともに，点 C_n は線分 AB の中点から点Bに向かって動き，$n\longrightarrow\infty$ とすると，点Bに限りなく近づくことになります．

（神奈川県立湘南高等学校）