ある不等式の証明について

柳田　五夫

> [1]　n 個の正の数　$p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_n$ が
> $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$ を満たすとき，不等式
> $$p_1\log p_1+p_2\log p_2+\cdots\cdots+p_n\log p_n \geqq -\log n \qquad (1)$$
> $\left(\text{等号は } p_1=p_2=\cdots=p_n=\dfrac{1}{n} \text{ のときに限る}\right)$
> が成り立つことを示せ．

この問題は，昨年度３年生から質問されたものであるが，$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$ という条件があるために，数学的帰納法で証明することが難しい．

（証明）（i）　$n=2$ のとき

$$f(p)=p\log p+(1-p)\log(1-p)+\log 2 \qquad (0<p<1)$$

とおくと

$$f'(p)=\log p-\log(1-p)$$

$0<p<\dfrac{1}{2}$ で $f'(p)<0$，$\dfrac{1}{2}<p<1$ で $f'(p)>0$

よって，$p=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ をとるから

$$f(p)\geqq 0$$

$$\therefore\quad p_1\log p_1+p_2\log p_2\geqq -\log 2$$

$$\left(\text{等号は } p_1=p_2=\frac{1}{2} \text{ のとき}\right)$$

すなわち，(1) は $n=2$ のとき成り立つ．

(ii)　$n=k$ $(\geqq 2)$ のとき (1) が成り立つと仮定する．

$$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k+p_{k+1}=1$$

$$p_1>0,\ \cdots\cdots,\ p_{k+1}>0$$

のとき，$p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_{k+1}$ のうちの最大のものを p とすると，$p\geqq p_1,\ p\geqq p_2,\ \cdots\cdots,\ p\geqq p_{k+1}$ から

$$(k+1)p\geqq p_1+p_2+\cdots\cdots+p_{k+1}=1$$

$$\therefore\quad p\geqq\frac{1}{k+1}$$

ここで　$p_{k+1}\geqq\dfrac{1}{k+1}$

としても一般性は失わない．

$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k=1-p_{k+1}$ (>0)　から

$$\frac{p_1}{1-p_{k+1}}+\frac{p_2}{1-p_{k+1}}+\cdots\cdots+\frac{p_k}{1-p_{k+1}}=1$$

$\lambda_i=\dfrac{p_i}{1-p_{k+1}}$ $(1\leqq i\leqq k)$　とおくと

$\lambda_1>0,\ \cdots\cdots,\ \lambda_k>0,\ \lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_k=1$

であるから，仮定より

$$\lambda_1\log\lambda_1+\lambda_2\log\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_k\log\lambda_k\geqq -\log k$$

が成り立つ．

$$p_1\log\frac{p_1}{1-p_{k+1}}+p_2\log\frac{p_2}{1-p_{k+1}}+\cdots\cdots+p_k\log\frac{p_k}{1-p_{k+1}}\geqq -(1-p_{k+1})\log k$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad p_1\log p_1+p_2\log p_2+\cdots\cdots+p_k\log p_k &\geqq (p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k)\log(1-p_{k+1})-(1-p_{k+1})\log k\\ &=(1-p_{k+1})\log(1-p_{k+1})-(1-p_{k+1})\log k\end{aligned}$$

両辺に $p_{k+1}\log p_{k+1}$ を加えると

$$\begin{aligned}p_1\log p_1+p_2\log p_2+\cdots\cdots+p_{k+1}\log p_{k+1} &\geqq p_{k+1}\log p_{k+1}+(1-p_{k+1})\log(1-p_{k+1})\\ &\quad -(1-p_{k+1})\log k \qquad (2)\end{aligned}$$

ここで，$g(p)=p\log p+(1-p)\log(1-p)-(1-p)\log k$

$\left(\dfrac{1}{k+1}\leqq p<1\right)$　とおくと

$$g'(p)=\log p-\log(1-p)+\log k$$

$$g''(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{1-p}>0$$

$g'(p)$ は $\left[\dfrac{1}{k+1},\ 1\right)$ で単調増加であるから

$$g'(p)\geqq g'\left(\frac{1}{k+1}\right)=0$$

よって，$g(p)$ は $\left[\dfrac{1}{k+1},\ 1\right)$ で単調増加で

$$g(p)\geqq g\left(\frac{1}{k+1}\right)=-\log(k+1)$$

$\therefore\quad g(p_{k+1}) \geqq -\log(k+1)$

(2) から

$p_1\log p_1+\cdots\cdots+p_{k+1}\log p_{k+1} \geqq -\log(k+1)$

が成り立つ.

等号は

$$\frac{p_1}{1-p_{k+1}}=\frac{p_2}{1-p_{k+1}}=\cdots\cdots=\frac{p_k}{1-p_{k+1}}=\frac{1}{k}$$

かつ $p_{k+1}=\dfrac{1}{k+1}$ から

$$p_1=p_2=\cdots\cdots=p_k=p_{k+1}=\frac{1}{k+1}$$

のときである.

以上から $n=k+1$ のときも (1) は成り立つ.

(iii) (i), (ii) から, 2 以上のすべての自然数に対して (1) は成り立つ. ■

第 2 段階 (ii) と同様な考え方で, 次の不等式が証明できる. (チェビシェフの不等式の特別の場合)

> [2] $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n$, $b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots\cdots \leqq b_n$,
> $b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n=1$ のとき
> $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$
> $\leqq n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)$

次に, [1] を一般化して条件を緩めることを考える. n 個の正の数 p_1, p_2, ……, p_n に対して

$s=p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n$ とおくと

$$\frac{p_1}{s}+\frac{p_2}{s}+\cdots\cdots+\frac{p_n}{s}=1,\quad \frac{p_i}{s}>0\ (1\leqq i\leqq n)$$

であるから, [1] より

$$\frac{p_1}{s}\log\frac{p_1}{s}+\frac{p_2}{s}\log\frac{p_2}{s}+\cdots\cdots+\frac{p_n}{s}\log\frac{p_n}{s} \geqq -\log n$$

$$\therefore\quad p_1\log p_1+p_2\log p_2+\cdots\cdots+p_n\log p_n \geqq (p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)\log s - s\log n$$

すなわち

$$p_1\log p_1+p_2\log p_2+\cdots\cdots+p_n\log p_n \geqq (p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n)\log\frac{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}{n}$$

を得る.

> [3] n 個の正の数 p_1, p_2, ……, p_n に対して
> $p_1\log p_1+p_2\log p_2+\cdots\cdots+p_n\log p_n$
> $\geqq (p_1+p_2+\cdots+p_n)\log\dfrac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{n}$ (3)
> (等号は $p_1=p_2=\cdots\cdots=p_n$ のときに限る)

が成り立つ.

上述の方法を [2] に適用すれば, 一般のチェビシェフの不等式を得る.

> [4] $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots\cdots \leqq a_n$, $b_1 \leqq b_2 \leqq \cdots\cdots \leqq b_n$
> のとき
> $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)$
> $\leqq n(a_1b_1+a_2b_2+\cdots\cdots+a_nb_n)$

[3] で $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$ とおくと (3) は

$p_1\log p_1+p_2\log p_2+\cdots\cdots+p_n\log p_n \geqq -\log n$

となり, 等号は

$p_1=p_2=\cdots\cdots=p_n$ かつ $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$

から

$$p_1=p_2=\cdots\cdots=p_n=\frac{1}{n}$$

のときに限り成り立つ.

したがって, [3] は [1] の拡張になっている. 帰納法で証明するには [3] の方がやりやすい.

(証明 1) (i) $n=2$ のとき

$$f(p_1)=p_1\log p_1+p_2\log p_2-(p_1+p_2)\log\frac{p_1+p_2}{2}$$

$(p_1>0)$ とおくと

$$f'(p_1)=\log p_1-\log\frac{p_1+p_2}{2}$$

$f'(p_1)=0$ から $p_1=p_2$

$p_1<p_2$ のとき $f'(p_1)<0$

$p_1>p_2$ のとき $f'(p_1)>0$

したがって, $p_1=p_2$ のとき最小値 $f(p_2)=0$ をとるから

$f(p_1) \geqq 0$

すなわち, $n=2$ のとき (3) は成り立つ.

(ii) $n=k$ のとき (3) が成り立つと仮定する.

$k+1$ 個の正の数 p_1, p_2, ……, p_{k+1} に対して

$$g(p)=p_1\log p_1+p_2\log p_2+\cdots+p_k\log p_k+p\log p - (p_1+\cdots\cdots+p_k+p)\log\frac{p_1+\cdots\cdots+p_k+p}{k+1}$$

$(p>0)$ とおくと

$$g'(p)=\log p-\log\frac{p_1+\cdots\cdots+p_k+p}{k+1}$$

$g'(p)=0$ から

$$p=\frac{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k}{k}\ (=\alpha\ とおく)$$

$p<\alpha$ のとき $g'(p)<0$, $p>\alpha$ のとき $g'(p)>0$

よって, $p=\alpha$ のとき最小値 $g(\alpha)$ をとる.

$$g(a)=p_1\log p_1+\cdots\cdots+p_k\log p_k$$

$$+\frac{p_1+\cdots\cdots+p_k}{k}\log\frac{p_1+\cdots\cdots+p_k}{k}$$

$$-\frac{k+1}{k}(p_1+\cdots\cdots+p_k)\log\frac{p_1+\cdots\cdots+p_k}{k}$$

$$=p_1\log p_1+\cdots\cdots+p_k\log p_k$$

$$-(p_1+\cdots\cdots+p_k)\log\frac{p_1+\cdots\cdots+p_k}{k}\geqq 0$$

（∵ 仮定）

したがって　$g(p_{k+1})\geqq 0$

等号は　$p_1=p_2=\cdots\cdots=p_k$

かつ　$p_{k+1}=\dfrac{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k}{k}$　から

$p_1=p_2=\cdots\cdots=p_{k+1}$　のときに限る．

以上から，$n=k+1$ のときも (3) は成り立つ．

(iii) (i), (ii) から，2 以上のすべての自然数に対して (3) は成り立つ．　■

証明 1 と同様にして，相加・相乗平均の不等式が証明できる．

> [5]　a_1, a_2, ……, a_n を正の数とする．
>
> (i) $x>0$ のとき，次の関数の最小値を求めよ．
>
> $$f(x)=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n+x^{n+1}$$
> $$-(n+1)\cdot\sqrt[n+1]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}\,x$$
>
> (ii) 上の結果を用いて，数学的帰納法により次の不等式を証明せよ．
>
> $$\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}\geqq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}\qquad(4)$$

ところで，(4) の証明方法はいろいろあるが，次の方法は瞠目に値する．

> [6]「n 個の任意の正の数 a_1, a_2, ……, a_n について
>
> $$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots\cdots a_n}\leqq\frac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n}$$
>
> が成り立つ」という命題を $P(n)$ とする．次の問いに答えよ．
>
> (i) $P(2)$ が正しいことを証明せよ．
>
> (ii) $P(k)$ が正しいとき，$P(2k)$ も正しいことを証明せよ．
>
> (iii) $P(k+1)$ が正しいとき，$P(k)$ も正しいことを証明せよ．　（62　横浜国大）

この方法で [3] を証明する．

（証明 2）(i) $n=2$ のとき（省略）

(ii) $n=k$ のとき成り立つと仮定する．

$$b_1=\frac{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k}{k}$$

$$b_2=\frac{p_{k+1}+p_{k+2}+\cdots\cdots+p_{2k}}{k}$$

とおくと

$$(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_{2k})\log\frac{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_{2k}}{2k}$$

$$=k(b_1+b_2)\log\frac{b_1+b_2}{2}$$

$$\leqq k(b_1\log b_1+b_2\log b_2)\qquad(\because\ (\mathrm{i}))$$

$$=(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k)\log\frac{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k}{k}$$

$$+(p_{k+1}+p_{k+2}+\cdots\cdots+p_{2k})$$

$$\times\log\frac{p_{k+1}+p_{k+2}+\cdots\cdots+p_{2k}}{k}$$

$$\leqq(p_1\log p_1+p_2\log p_2+\cdots\cdots+p_k\log p_k)$$

$$+(p_{k+1}\log p_{k+1}+p_{k+2}\log p_{k+2}+\cdots\cdots$$

$$+p_{2k}\log p_{2k})$$

（∵ 仮定）

$$\therefore\quad p_1\log p_1+p_2\log p_2+\cdots\cdots+p_{2k}\log p_{2k}$$

$$\geqq(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_{2k})\log\frac{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_{2k}}{2k}$$

等号は　$b_1=b_2$

かつ　$p_1=p_2=\cdots\cdots=p_k$

かつ　$p_{k+1}=p_{k+2}=\cdots\cdots=p_{2k}$

すなわち　$p_1=p_2=\cdots\cdots=p_{2k}$　のときに限る．

よって，$n=2k$ のときも成り立つ．

(iii) $n=k+1$ のとき成り立つと仮定する．

$$p_{k+1}=\frac{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k}{k}$$

とおくと，仮定から

$$p_1\log p_1+\cdots\cdots+p_k\log p_k$$

$$+\frac{p_1+\cdots\cdots+p_k}{k}\log\frac{p_1+\cdots\cdots+p_k}{k}$$

$$\geqq\left(p_1+\cdots\cdots+p_k+\frac{p_1+\cdots\cdots+p_k}{k}\right)$$

$$\times\log\frac{p_1+\cdots\cdots+p_k+\dfrac{p_1+\cdots\cdots+p_k}{k}}{k+1}$$

$$=\frac{k+1}{k}(p_1+\cdots\cdots+p_k)\log\frac{p_1+\cdots\cdots+p_k}{k}$$

$$\therefore\quad p_1\log p_1+\cdots\cdots+p_k\log p_k$$

$$\geqq(p_1+\cdots\cdots+p_k)\log\frac{p_1+\cdots\cdots+p_k}{k}$$

等号は $p_1=p_2=\cdots\cdots=p_k=\dfrac{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_k}{k}$

すなわち $p_1=p_2=\cdots\cdots=p_k$ のときに限る．

よって，$n=k$ のときも成り立つ．

(iv) (i), (ii), (iii) から，2以上のすべての自然数 n に対して成り立つ． ■

(i), (ii) から，$n=2^k$ ($k=1,\ 2,\ \cdots\cdots$) の場合に成り立つことがわかる．そこで，n が 2^k という形でないときは，$n<2^m$ $(=l)$ となる自然数 m をとって

$$p_{n+1}=p_{n+2}=\cdots\cdots=p_l=\frac{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}{n}\quad(=A)$$

とする．2^m $(=l)$ 個の正の数 $p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_l$ に対して (3) が成り立つから

$$\begin{aligned}&p_1\log p_1+p_2\log p_2+\cdots\cdots+p_n\log p_n\\&\qquad\qquad+(l-n)A\log A\\&\geqq(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n+\underbrace{A+\cdots\cdots+A}_{l-n\text{ 個}})\\&\quad\times\log\frac{p_1+\cdots+p_n+A+\cdots+A}{l}\\&=lA\log A\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad &p_1\log p_1+\cdots\cdots+p_n\log p_n\\&\geqq nA\log A\\&=(p_1+\cdots\cdots+p_n)\log\frac{p_1+\cdots\cdots+p_n}{n}\end{aligned}$$

等号は　$p_1=p_2=\cdots\cdots=p_n=A$

すなわち　$p_1=p_2=\cdots\cdots=p_n$

のときに限り成り立つ．

相加平均・相乗平均の不等式は，$y=-\log x$ が下に凸であることを用いて証明できる．[3] もこの方法が使える．

(証明3)　$f(x)=x\log x$ $(x>0)$　とおくと

$$f'(x)=\log x+1,\quad f''(x)=\frac{1}{x}>0$$

であるから，$y=f(x)$ のグラフは下に凸である．

$$\therefore\quad \frac{f(p_1)+\cdots\cdots+f(p_n)}{n}\geqq f\left(\frac{p_1+\cdots\cdots+p_n}{n}\right)$$

$$\frac{p_1\log p_1+\cdots\cdots+p_n\log p_n}{n}\geqq\frac{p_1+\cdots\cdots+p_n}{n}\log\frac{p_1+\cdots\cdots+p_n}{n}$$

よって，(3) を得る． ■

証明2を振り返ってみると，次の命題が証明できる．

> [7]　f の定義域を区間Dとし，任意の $p,\ q$ に対して
>
> $$f\left(\frac{p+q}{2}\right)\leqq\frac{f(p)+f(q)}{2}$$
>
> が成り立つとき，任意の $p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_n$ に対して
>
> $$f\left(\frac{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}{n}\right)\leqq\frac{f(p_1)+f(p_2)+\cdots\cdots+f(p_n)}{n}$$
>
> が成り立つ．

[7] の証明方法を用いて，次の問題が解ける．

> [8]　関数 $f(x)$ が $0\leqq t\leqq 1$ に対して
>
> $$tf(x)+(1-t)f(y)\geqq f(tx+(1-t)y)\qquad(5)$$
>
> を満たすとき
>
> $$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots\cdots+f(x_n)}{n}\geqq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}\right)$$
>
> であることを示せ．
>
> これを使って，a を正の定数とするとき，
>
> $$\frac{a^{x_1}+a^{x_2}+\cdots\cdots+a^{x_n}}{n}\geqq a^{\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}}$$
>
> が成り立つことを示せ．　(54　武蔵工大)

$t=\dfrac{1}{2}$ とおくと，$\dfrac{1}{2}f(x)+\dfrac{1}{2}f(y)\geqq f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$ が成り立つから，[7] より

$$\frac{f(x_1)+\cdots\cdots+f(x_n)}{n}\geqq f\left(\frac{x_1+\cdots\cdots+x_n}{n}\right)$$

を得る．

ところが，(5) をうまく利用すれば証明2の帰納法でなく，普通の帰納法で証明することができる．それには，第2段階で，

$$t=\frac{1}{k+1},\quad x=x_{k+1},\quad y=\frac{x_1+\cdots\cdots+x_k}{k}$$

とおくと，(5) から

$$\frac{1}{k+1}f(x_{k+1})+\frac{k}{k+1}f\left(\frac{x_1+\cdots\cdots+x_k}{k}\right)\geqq f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_k+x_{k+1}}{k+1}\right)$$

仮定より

$$\frac{f(x_1)+\cdots\cdots+f(x_k)}{k}\geqq f\left(\frac{x_1+\cdots\cdots+x_k}{k}\right)$$

であるから

$$\frac{1}{k+1}f(x_{k+1})+\frac{k}{k+1}\cdot\frac{f(x_1)+\cdots\cdots+f(x_k)}{k}$$
$$\geqq f\left(\frac{x_1+\cdots\cdots+x_{k+1}}{k+1}\right)$$
$$\therefore\quad \frac{f(x_1)+\cdots\cdots+f(x_{k+1})}{k+1}\geqq f\left(\frac{x_1+\cdots\cdots+x_{k+1}}{k+1}\right)$$

この証明方法は，次の問題でも使える．

> [9]　$f(x)$ を $a<x<b$ で第2次導関数が負であるような関数とするとき，次の問いに答えよ．
> (i) $a<c<b$，$a<d<b$，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$，$p+q=1$ のとき
> $$f(pc+qd)\geqq pf(c)+qf(d)$$
> を証明せよ．
> (ii) (i) において，c_1，c_2，……，c_n が $a<c_i<b$ ($i=1$, 2, ……, n) を満たすならば
> $$f\left(\frac{c_1+c_2+\cdots\cdots+c_n}{n}\right)\geqq\frac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots\cdots+f(c_n)}{n}$$
> であることを証明せよ．　(57　滋賀医科大)

次の問題の (ii) の不等式は，[3] の不等式の拡張になっている．

> [10]　(i) 正数 x について，不等式 $x-1\geqq\log x$ が成り立つことを示せ．
> (ii) $2n$ 個の正数 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n が，$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n$ を満たすとき，不等式
> $$a_1\log a_1+a_2\log a_2+\cdots\cdots+a_n\log a_n$$
> $$\geqq a_1\log b_1+a_2\log b_2+\cdots\cdots+a_n\log b_n \qquad (6)$$
> が成り立つことを示せ．また等号が成り立つのはどんなときか．　(58　東京女大)

(ii) において，
$$a_i=p_i\ (1\leqq i\leqq n),$$
$$b_1=b_2=\cdots\cdots=b_n=\frac{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n}{n}$$
とおくと，[3] の不等式 (3) を得る．

([10] (ii) の証明)
<u>右辺−左辺</u>
$$\underline{=a_1\log\frac{b_1}{a_1}+a_2\log\frac{b_2}{a_2}+\cdots\cdots+a_n\log\frac{b_n}{a_n}}$$
$$\underline{\leqq a_1\left(\frac{b_1}{a_1}-1\right)+a_2\left(\frac{b_2}{a_2}-1\right)+\cdots\cdots+a_n\left(\frac{b_n}{a_n}-1\right)}$$
(∵　(i))
$$\underline{=(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n)-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)}$$
$$=0$$
∴　左辺≧右辺

等号は　$\frac{b_1}{a_1}=1$，$\frac{b_2}{a_2}=1$，……，$\frac{b_n}{a_n}=1$
すなわち　$a_1=b_1$，$a_2=b_2$，……，$a_n=b_n$
のときに成立する．　■

[10] (ii) の証明（——線部）から次の不等式を得る．

> [11]　$2n$ 個の正数 a_1，a_2，……，a_n，b_1，b_2，……，b_n に対して，不等式
> $$a_1\log a_1+a_2\log a_2+\cdots\cdots+a_n\log a_n-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$
> $$\geqq a_1\log b_1+a_2\log b_2+\cdots\cdots+a_n\log b_n-(b_1+b_2+\cdots\cdots+b_n) \qquad (7)$$
> が成り立つ．

[10] (ii) を更に一般化する．$2n$ 個の正数 a_1，a_2，……，a_n，b_1，b_2，……，b_n に対して，$A=\sum_{i=1}^{n}a_i$，$B=\sum_{i=1}^{n}b_i$ とし，$a_i'=Ba_i$，$b_i'=Ab_i$ とおくと，$\sum_{i=1}^{n}a_i'=\sum_{i=1}^{n}b_i'$ ($=AB$) を満たすから，[10] (6) より
$$\sum_{i=1}^{n}Ba_i\log Ba_i\geqq\sum_{i=1}^{n}Ba_i\log Ab_i$$
が成り立つ．
これを変形すると
$$\sum_{i=1}^{n}a_i\log a_i+A\log B\geqq\sum_{i=1}^{n}a_i\log b_i+A\log A \qquad (8)$$
を得る．

> [12]　$2n$ 個の正数 a_1，a_2，……，a_n，b_1，b_2，……，b_n に対して
> $$a_1\log a_1+\cdots\cdots+a_n\log a_n-(a_1+\cdots\cdots+a_n)\log(a_1+\cdots\cdots+a_n)$$
> $$\geqq a_1\log b_1+\cdots\cdots+a_n\log b_n-(a_1+\cdots\cdots+a_n)\log(b_1+\cdots\cdots+b_n) \qquad (9)$$
> が成り立つ．
> 等号は $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\cdots\cdots=\frac{b_n}{a_n}$ のときに限る．
> (柳田)

(8) から

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \log a_i + A\log\frac{B}{A} \geqq \sum_{i=1}^{n} a_i \log b_i \qquad (10)$$

不等式 $x-1 \geqq \log x$ で，$x=\dfrac{B}{A}$ とおくと

$$\frac{B}{A}-1 \geqq \log\frac{B}{A} \qquad \therefore\ B-A \geqq A\log\frac{B}{A}$$

よって，(10) とから

$$B-A+\sum_{i=1}^{n} a_i \log a_i \geqq \sum_{i=1}^{n} a_i \log b_i$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n} a_i \log a_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \geqq \sum_{i=1}^{n} a_i \log b_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$$

これは，[11] の不等式 (7) にほかならない．

次に，今までの不等式の積分版を考えてみる．

> [13] (i) $y>0$ のとき，$\log y \leqq y-1$ を証明せよ．
> (ii) 2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ が
> ① $f(x)>0$，$g(x)>0$ $\quad(0 \leqq x \leqq 1)$
> ② $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = 1$
> 不要
> を満たしているとき，(i) を用いて
> $$\int_0^1 f(x)\log g(x)\,dx \leqq \int_0^1 f(x)\log f(x)\,dx \qquad (11)$$
> を証明せよ． (63 九州芸術工科大)

(証明) (ii) (i) から $\log\dfrac{g(x)}{f(x)} \leqq \dfrac{g(x)}{f(x)}-1$

$$\therefore\ f(x)\{\log g(x) - \log f(x)\} \leqq g(x)-f(x)$$

よって

$$\int_0^1 f(x)\{\log g(x)-\log f(x)\}\,dx$$
$$\leqq \int_0^1 \{g(x)-f(x)\}\,dx$$
$$= \int_0^1 g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$$
$$=0$$

$$\therefore\ \int_0^1 f(x)\log g(x)\,dx \leqq \int_0^1 f(x)\log f(x)\,dx$$ ■

この証明からわかるように次の不等式を得る．

> [14] [0, 1] で正の値をとる2つの連続関数 $f(x)$，$g(x)$ に対して
> $$\int_0^1 f(x)\log g(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx \leqq \int_0^1 f(x)\log f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \qquad (12)$$

この不等式は定積分の性質から導くことができる．

[0, 1] を n 等分し，分点を x_1，x_2，……，x_{n-1} とし，$x_n=1$ とおくと，$f(x_i)>0$，$g(x_i)>0$ であるから，(7) より

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\log f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\log g(x_i) - \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

両辺を n で割って，$n \longrightarrow \infty$ とすると

$$\int_0^1 f(x)\log f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx \geqq \int_0^1 f(x)\log g(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx$$

を得る．

同様にして (9) から

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\log f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\log\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\log g(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\log\sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

両辺に $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\log n$ を加え，更に n で割ると

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\log f(x_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\log\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right\}$$
$$\geqq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\log g(x_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\log\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right\}$$

$n \longrightarrow \infty$ とすると

$$\int_0^1 f(x)\log f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\log\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \int_0^1 f(x)\log g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\log\int_0^1 g(x)\,dx$$

よって，次の不等式を得る．

> [15] [0, 1] で正の値をとる2つの連続関数 $f(x)$，$g(x)$ に対して
> $$\int_0^1 f(x)\log f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\log\int_0^1 f(x)\,dx \geqq \int_0^1 f(x)\log g(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx\log\int_0^1 g(x)\,dx \qquad (13)$$

(13) と $B-A \geqq A\log\dfrac{B}{A}$ で，$A=\int_0^1 f(x)\,dx$，$B=\int_0^1 g(x)\,dx$ とおけば，(12) を得る．

(栃木県立栃木高等学校)